



Российская Академия Наук

АТ АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

4

АПРЕЛЬ

Москва

2024

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишнеvский В.М.,
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,
Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И.,
Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А.,
Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция),
Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л.,
Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

«Издательство «Наука»

© 2024 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

**О ВНЕШНЕМ ОЦЕНИВАНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ
ДОСТИЖИМОСТИ И 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ
С СУММАРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ
НА СКАЛЯРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ¹**

Рассматривается задача построения множеств достижимости и 0-управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление. Для случая квадратичных ограничений и диагонализированной матрицы системы данные множества построены явно в виде эллипсоидов. В общем случае предельные множества достижимости и 0-управляемости представлены в виде неподвижных точек сжимающего отображения в метрическом пространстве компактов. На основе метода простой итерации предложена сходящаяся процедура построения их внешних оценок с указанием априорной погрешности аппроксимации. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейная дискретная система, предельное множество управляемости, предельное множество достижимости, расстояние Хаусдорфа, принцип сжимающих отображений.

DOI: 10.31857/S0005231024040018, EDN: ZHANRC

1. Введение

При исследовании динамических систем зачастую приходится учитывать различные ограничения, наложенные на управляющие воздействия, что приводит к тому, что далеко не все терминальные состояния являются достижимыми из заданного начального даже за бесконечное время. В результате классических условий управляемости Калмана оказывается недостаточно, чтобы сделать вывод о достижимости того или иного терминального состояния. В связи с этим представляется актуальной разработка методов, позволяющих формировать конструктивное описание множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат, за конечное число шагов, а также оценки предельных множеств достижимости

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

и 0-управляемости [1]. Множества 0-управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления для систем с дискретным временем [2, 3]. Таким образом, при помощи предельных множеств можно судить о разрешимости данных задач в принципе.

На данный момент активно развиваются методы оценивания множеств достижимости различных классов дискретных систем [4], гибридных систем [5], а также систем с различными видами неопределенностей [6]. Известны аналитические представления множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞ -нормы. В частности, доказано, что в случае линейных ограничений на управление множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов представляют собой многогранники [2]. Для их предельных аналогов сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [7–9]. При этом большая часть работ либо сфокусирована на исследовании только общих свойств предельных множеств достижимости и 0-управляемости [8–12], либо рассматривает системы с неограниченным управлением [10–14]. Только в ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств [15, 16] или принципа максимума [17].

Для систем с суммарными ограничениями на управление получено описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости в виде многогранников для случая ограничений в смысле l_1 -нормы [18]. При выборе l_p -нормы с произвольным значением параметра $p \in (1; +\infty)$ сформулированы и доказаны общие свойства предельных множеств достижимости и 0-управляемости [19]. В частности, доказано их представление в виде проекций суперэллипсоидальных множеств конечной [20, 21] и бесконечной размерностей, что тесно связано со строго выпуклым анализом [22, 23], выпуклым программированием [24], теорией нормированных пространств [25] и линейных операторов [26].

Зачастую в задачах управления требуется исследовать заданное начальное состояние на достижимость и управляемость, что сводится к проверке принадлежности фиксированной точки фазового пространства предельному множеству достижимости или 0-управляемости. Численно данная процедура может быть сведена к вычислению функционала Минковского, но известных результатов [19] недостаточно для его построения в явном виде. Более того, описание функционала Минковского образа выпуклого множества при линейном преобразовании в общем случае является нетривиальной задачей. По этой причине оказывается актуальной разработка методов, реализуемых программно, которые позволят вычислить точно функционал Минковского предельных множеств достижимости и 0-управляемости либо их внешних оценок сколь угодно высокого порядка точности.

В статье изучаются вопросы построения функционала Минковского множеств достижимости и 0-управляемости с суммарным ограничением на управление в смысле l_p -нормы в случае, когда они ограничены. Удаётся в явном виде описать искомую функцию при квадратичных ограничениях на управление и доказать, что исследуемые множества представляют собой эллипсоиды. Для случая произвольных нормированных пространств предельные множества достижимости и 0-управляемости описываются в качестве неподвижной точки сжимающего отображения в пространстве компактов, наделённого метрикой Хаусдорфа. Это позволяет предложить сходящийся итерационный процесс построения внешних оценок данных множеств с указанием априорной погрешности в явном виде. Для ряда значений параметров результирующие оценки имеют полиэдральную структуру, что делает возможным их применение в расчетах на ЭВМ.

Содержание статьи следующее. В разделе 2 производится постановка задачи. В разделе 3 обсуждаются вопросы вычисления функционала Минковского предельных множеств достижимости и 0-управляемости. Для частного случая l_2 -ограничений на управление и диагонализированной матрицы системы соответствующие множества строятся в явном виде. В разделе 4 описывается аппарат сжимающих отображений, используемый для построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости. В разделе 5 предлагается метод формирования внешних оценок данных множеств произвольного порядка точности на основе метода простой итерации. В разделе 6 демонстрируется эффективность разработанного математического аппарата на различных примерах.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная система с дискретным временем и суммарным ограничением на скалярное управление:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ x(0) &= x_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u(k)|^p \leq 1, \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}$ – скалярное управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ – матрицы системы, $p > 1$ – параметр, определяющий тип суммарного ограничения на управление.

Обозначим для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\mathcal{Y}_p(N)$ множество достижимости системы (1), т.е. множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1) за N шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$(2) \quad \mathcal{Y}_p(N) = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ обозначим предельное множество достижимости системы (1), т.е. множество тех состояний, в которые систему (1) можно перевести за конечное число шагов посредством допустимого управления:

$$(3) \quad \mathcal{Y}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_p(N).$$

Обозначим для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\mathcal{X}_p(N)$ множество 0-управляемости системы (1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1) за N шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$(4) \quad \mathcal{X}_p(N) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} b u(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{X}_{p,\infty}$ обозначим предельное множество 0-управляемости системы (1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (1) можно перевести в 0 за конечное число шагов посредством допустимого управления:

$$(5) \quad \mathcal{X}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_p(N).$$

Требуется разработать эффективный метод построения внешней оценки множеств (3) и (5) с любой наперед заданной точностью. В качестве критерия точности рассматривается расстояние Хаусдорфа ρ_H , а все множества предполагаются элементами полного метрического пространства (\mathbb{K}_n, ρ_H) [27]:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n &= \{ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} \text{ — компакт} \}, \\ \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|_r; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|_r \right\}, \\ \|x\|_r &= \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}, & r \geq 1, \\ \max_{i=1,n} |x_i|, & r = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Вопросы точного описания предельных множеств достижимости и 0-управляемости

Обозначим через $\mathcal{E}_p(\infty)$ шар единичного радиуса с центром в 0 в нормированном пространстве l_p [25]:

$$\mathcal{E}_p(\infty) = \left\{ u \in l_p : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \leq 1 \right\}.$$

Также будем отождествлять последовательность $B = (b_1, b_2, \dots) \in l_q^n$ с линейным оператором $B: l_p \rightarrow \mathbb{R}_r^n$, действующим по правилу

$$Bu = \sum_{k=1}^{\infty} u_k b_k.$$

Здесь предполагается, что числа p и q связаны соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а пространство \mathbb{R}_r^n является нормированным пространством $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_r)$. Отсюда с учетом теоремы Рисса [25] следует ограниченность оператора B , что позволяет рассматривать его как элемент нормированного пространства l_q^n с определенной на нем операторной нормой:

$$\|B\|_{l_q^n} = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|Bu\|_r.$$

Для простоты будем также отождествлять произвольную последовательность $y \in l_q$ с порожденным ею согласно теореме Рисса линейным и ограниченным функционалом $y: l_p \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(y, u) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k u_k.$$

Существенными являются необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (3) и (5), определяемые матрицами системы A и b . Жордановым базисом матрицы A называется набор линейно независимых векторов $h_1, \dots, h_n \subset \mathbb{R}^n$, который задает преобразование подобия матрицы A к ее вещественной жордановой канонической форме [28, раздел 3.4 гл. 3]. Такой базис единственен с точностью до ненулевых сомножителей и порядка векторов h_1, \dots, h_n , и каждый базисный вектор соответствует некоторой жордановой клетке, т.е. некоторому собственному значению матрицы A . Если разбить элементы жорданова базиса на три множества по критерию того, соответствуют ли они собственному значению матрицы A большему, равному или меньшему 1 по модулю, то получится определить следующие три инвариантных подпространства:

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\},$$

$$\mathbb{L}_{=1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| = 1\},$$

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.$$

В [19] продемонстрировано, что $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничены тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия соответственно:

$$(6) \quad Y_{\infty} = (b, Ab, A^2b, \dots) \in l_q^n \text{ или } b \in \mathbb{L}_{<1},$$

$$(7) \quad X_{\infty} = (A^{-1}b, A^{-2}b, \dots) \in l_q^n \text{ или } b \in \mathbb{L}_{>1}.$$

В этих случаях справедливы представления:

$$(8) \quad \overline{\mathcal{Y}}_{p,\infty} = Y_\infty \mathcal{E}_p(\infty) \in \mathbb{K}_n,$$

$$(9) \quad \overline{\mathcal{X}}_{p,\infty} = X_\infty \mathcal{E}_p(\infty) \in \mathbb{K}_n.$$

Согласно (8) и (9) предельные множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}$, $\mathcal{X}_{p,\infty}$ представляют собой выпуклые множества, а следовательно, для их конструктивного описания посредством алгебраических неравенств может быть использован функционал Минковского [25, разд. 3, §2, гл. III]:

$$\mu(u, \mathcal{U}) = \inf\{t > 0: u \in t\mathcal{U}\}.$$

Продемонстрируем сложность вычисления функционала Минковского множеств (3) и (5) для произвольного значения параметра p , а также приведем частный случай, когда данное описание удается построить.

Лемма 1. Пусть $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ – нормированные пространства, $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_1$ – выпуклое и ограниченное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $B: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ – линейный, сюръективный и ограниченный оператор.

Тогда

$$\mu(x, B\mathcal{U}) = \inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \mu(u, \mathcal{U}).$$

Доказательство леммы 1 и всех последующих утверждений приведено в Приложении.

Получим следствия леммы 1, полагая $\mathbb{L}_1 = l_p$, $\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = \mathcal{E}_p(\infty)$. Выбор нормы в пространстве \mathbb{R}^n несущественен, так как значение функционала Минковского не зависит от нормы, а в силу эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве [25] оператор B будет ограничен для любой нормы в \mathbb{R}^n . Но для краткости обозначений будем полагать \mathbb{R}^n евклидовым со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Введем нелинейный оператор $I_p(u): l_p \rightarrow l_q$ по формуле

$$I_p(u) = (\text{sign}(u_1)|u_1|^{p-1}, \text{sign}(u_2)|u_2|^{p-1}, \dots).$$

Обратным оператором к I_p является оператор I_q . Через $B^*: \mathbb{R}^n \rightarrow l_q$ обозначим оператор, сопряженный к B .

Лемма 2. Пусть $B \in l_q^n$ – сюръекция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что

$$\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty)) = \|B^* \lambda\|_{l_q}^{q-1},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$(10) \quad B I_q(B^* \lambda) = x.$$

Согласно лемме 2 и представлениям (8) и (9) вычисление функционала Минковского для предельных множеств достижимости и управляемости может быть сведено к решению системы нелинейных уравнений вида (10) при выборе в качестве B операторов Y_∞ и X_∞ соответственно, что является нетривиальной задачей в общем случае. Хотя при значении параметров $p = q = 2$ решение системы можно получить в явном виде.

Следствие 1. Пусть $p = q = 2$, $B \in l_q^n$ – сюръекция.

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что

$$\mu(x, B\mathcal{E}_2(\infty)) = \sqrt{x^T(BB^*)^{-1}x}.$$

Применение следствия 1 для построения $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ и $\mathcal{X}_{2,\infty}$ определяется возможностью построить явно матрицу $BB^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$, что согласно определению оператора B сводится к вычислению сходящегося ряда:

$$BB^* = \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_k^T,$$

где B полагается равным Y_∞ или X_∞ .

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обладает n линейно независимыми собственными векторами $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{C}^n$, соответствующими собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $S = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Используются следующие обозначения:

$$H = S \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} S^T,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = S^{-1} b b^T (S^{-1})^T, \quad \beta_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{ij}}{1 - \lambda_i \lambda_j}, & \lambda_i \lambda_j \neq 1, \\ 0, & \lambda_i \lambda_j = 1. \end{cases}$$

Тогда

1) в случае $b \in \mathbb{L}_{<1}$ верно представление

$$\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H_{Y,\infty} x \leq 1\},$$

где $H_{Y,\infty} = H^{-1}$;

2) в случае $b \in \mathbb{L}_{>1}$ и $\det A \neq 0$ верно представление

$$\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H_{X,\infty} x \leq 1\},$$

где $H_{X,\infty}^{-1} = -H^{-1}$.

4. Предельные множества достижимости и 0-управляемости как неподвижная точка

Приведем свойства принципа сжимающих отображений и неподвижных точек, полезные для представления множеств (3) и (5). Известно, что множества (2) и (4) являются выпуклыми компактными и допускают представление в виде образа $\mathcal{E}_p(\infty)$ при линейном преобразовании [19, лемма 9]:

$$(11) \quad \mathcal{Y}_p(N) = Y_N \mathcal{E}_p(\infty), \quad Y_N = (b, Ab, \dots, A^{N-1}b, 0, \dots) \in l_q^n,$$

$$(12) \quad \mathcal{X}_p(N) = X_N \mathcal{E}_p(\infty), \quad X_N = (A^{-1}b, A^{-2}b, \dots, A^{-N}b, 0, \dots) \in l_q^n, \quad \det A \neq 0.$$

Представим операторы X_∞ и Y_∞ в качестве неподвижных точек сжимающего отображения. Для этого введем два линейных и ограниченных оператора $\mathbf{MULT}_A, \mathbf{R}: l_q^n \rightarrow l_q^n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{MULT}_A B' &= (Ab_1, Ab_2, \dots), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathbf{R} B' &= (0, b_1, b_2, \dots). \end{aligned}$$

Для произвольных $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ определим отображение $\mathbf{F}_{A,b}: l_q^n \rightarrow l_q^n$ следующим образом:

$$(13) \quad \mathbf{F}_{A,b}(B') = \mathbf{R} \circ \mathbf{MULT}_A B' + (b, 0, 0, \dots) = (b, Ab_1, Ab_2, \dots).$$

Для произвольного $M \in \mathbb{N}$ через $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}: l_q^n \rightarrow l_q^n$ обозначим M -кратную композицию отображения $\mathbf{F}_{A,b}$:

$$\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(B') = \underbrace{(\mathbf{F}_{A,b} \circ \dots \circ \mathbf{F}_{A,b})}_M(B').$$

Лемма 4. Пусть $Y_\infty \in l_q^n$. Тогда Y_∞ – неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A,b}$.

Лемма 5. Пусть $\det A \neq 0$, $X_\infty \in l_q^n$. Тогда X_∞ – неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A^{-1}, A^{-1}b}$.

Лемма 6. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1. Тогда для любого $b \in \mathbb{R}^n$

1) существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что $A^M: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0; 1)$;

2) $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$ – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия α_r .

Следствие 2. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1. Тогда Y_∞ – единственная неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A,b}$. Если $M \in \mathbb{N}$ – такое число, что $A^M: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ – сжимающее отображением с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0; 1)$, то

$$\|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} \leq \frac{\alpha_r^N}{1 - \alpha_r} \|Y_M\|_{l_q^n}.$$

Следствие 3. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1. Тогда X_∞ – единственная неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A^{-1}, A^{-1}b}$. Если $M \in \mathbb{N}$ – такое число, что $A^{-M}: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ – сжимающее отображением с коэффициентом сжатия $\beta_r \in [0; 1)$, то

$$\|X_\infty - X_{NM}\|_{l_q^n} \leq \frac{\beta_r^N}{1 - \beta_r} \|X_M\|_{l_q^n}.$$

Оценки операторов Y_∞ и X_∞ , полученные на основе метода простой итерации в следствиях 2 и 3, можно также распространить на множества (3) и (5).

Лемма 7. Пусть $B', C' \in l_q^n$. Тогда

$$\rho_H(B' \mathcal{E}_p(\infty), C' \mathcal{E}_p(\infty)) \leq \|B' - C'\|_{l_q^n}.$$

Теорема 1. Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^M: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0; 1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\rho_H(\overline{\mathcal{Y}}_{p, \infty}, \mathcal{Y}_p(NM)) \leq \frac{\alpha_r^N}{1 - \alpha_r} \|Y_M\|_{l_q^n}.$$

Теорема 2. Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^{-M}: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\beta_r \in [0; 1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}}_{p, \infty}, \mathcal{X}_p(NM)) \leq \frac{\beta_r^N}{1 - \beta_r} \|X_M\|_{l_q^n}.$$

Следствие 2 и теорема 1 базируются на том, что построенный оператор $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$ оказывается сжимающими, если аналогичным свойством обладает матрица A^M , а также он наследует коэффициент сжатия данной матрицы. Добиться того, чтобы для некоторого $M \in \mathbb{N}$ отображение A^M оказалось сжатием, возможно в том и только в том, случае, если все собственные значения A по модулю строго меньше 1. Следует отметить, что данное условие является только достаточным условием ограниченности предельного множества достижимости $\mathcal{Y}_{p, \infty}$, но не необходимым. Необходимое и достаточное условие ограниченности представляет собой включение $b \in \mathbb{L}_{<1}$ [19]. Даже если матрица A обладает собственными значениями, большими либо равными по модулю 1, при выполнении условия $b \in \mathbb{L}_{<1}$ множество $\mathcal{Y}_{p, \infty}$ будет ограниченным, однако непосредственно использовать аппарат сжимающих отображений для его построения окажется невозможным в силу отсутствия коэффициента сжатия у матрицы A^M при любом $M \in \mathbb{N}$.

Тем не менее при $b \in \mathbb{L}_{<1}$ можно сузить фазовое пространство системы (1) до инвариантного подпространства $\mathbb{L}_{<1}$, на котором отображение A будет обладать только собственными значениями, строго меньшими 1 по модулю. Это позволит воспользоваться следствием 2 и теоремой 1 для построения множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}$. Аналогичные рассуждения справедливы и для множества $\mathcal{X}_{p,\infty}$, следствия 3 и теоремы 2 при замене A на A^{-1} , b на $A^{-1}b$ и $\mathbb{L}_{<1}$ на $\mathbb{L}_{>1}$.

Отдельно следует отметить случай, когда при разложении b по вещественному жорданову базису A компоненты, соответствующие $\mathbb{L}_{=1}$, оказываются отличными от 0, т.е. A обладает собственными значениями, равными по модулю 1. Тогда неограниченными оказываются оба множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и $\mathcal{X}_{p,\infty}$, что не позволяет представить их в виде неподвижных точек сжимающих отображений.

5. Метод построения внешних оценок предельных множеств

Рассмотрим вопросы конструирования внешних оценок множеств $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и $\mathcal{X}_{p,\infty}$. В [19] предложены методы построения множеств $\mathcal{Y}_p(N)$ и $\mathcal{X}_p(N)$ для любого произвольного $N \in \mathbb{N}$ на основе точного описания их опорных функций. При этом теоремы 1 и 2 дают априорную оценку точности при рассмотрении множеств (2) и (4) в качестве внутренней аппроксимации предельных множеств (3) и (5) соответственно. В сочетании со свойствами расстояния Хаусдорфа это позволяет также построить внешнюю аппроксимацию.

Для этого обозначим через $\mathcal{B}_R^r(x_0) \subset \mathbb{R}_r^n$ шар радиуса R с центром в x_0 в пространстве \mathbb{R}_r^n .

Теорема 3. Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^M: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha_r \in [0; 1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо включение

$$\mathcal{Y}_{p,\infty} \subset \mathcal{Y}_p(NM) + \mathcal{B}_{R_N}^r(0),$$

$$R_N = \frac{\alpha_r^N}{1 - \alpha_r} \|Y_M\|_{l_q^n}.$$

Теорема 4. Пусть все собственные значения $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^{-M}: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\beta_r \in [0; 1)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо включение

$$\mathcal{X}_{p,\infty} \subset \mathcal{X}_p(NM) + \mathcal{B}_{R_N}^r(0),$$

$$R_N = \frac{\beta_r^N}{1 - \beta_r} \|X_M\|_{l_q^n}.$$

Поскольку величина R_N в предположениях теорем 3 и 4 стремится к 0, они позволяют построить с произвольной степенью точности внешние оценки предельных множеств достижимости $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_{p,\infty}$ системы (1)

в предположении, что множества достижимости $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и 0-управляемости $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ за конечное число шагов построены. Для их построения можно воспользоваться результатами, представленными в [19, теорема 1], где для управляемых по Каллману систем для множеств (2) и (4) в явном виде указано описание произвольной опорной гиперплоскости и точки касания в зависимости от выбранного опорного вектора.

Определенную сложность составляет вычисление значений величин M , α_r , β_r , $\|Y_M\|_{l_q^n}$ и $\|X_M\|_{l_q^n}$. В общем случае α_r представляет собой операторную норму $A^M: \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}_r^n$:

$$(14) \quad \alpha_r = \max_{\|x\|_r \leq 1} \|A^M x\|_r.$$

Задача выпуклого программирования (14) может быть решена численно для выбранного значения параметра $r \in [1; \infty]$. При этом для значений $r \in \{1, 2, \infty\}$ известны аналитические представления [25]:

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}, \quad \alpha_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

где через a_{ij} обозначены компоненты матрицы A^M . Значение β_r определяется аналогичным образом при замене матрицы A на A^{-1} .

Величина M может быть определена через последовательное вычисление α_r или β_r , пока не будет выполнено условие $\alpha_r \in [0; 1)$ при построении $\mathcal{Y}_{p, \infty}$ или $\beta_r \in [0; 1)$ при построении $\mathcal{X}_{p, \infty}$. Априорные оценки M неизвестны, хотя для случая, когда A обладает n линейно независимыми собственными векторами, $M = 1$.

Методы вычисления $\|Y_M\|_{l_q^n}$ и $\|X_M\|_{l_q^n}$ представим в виде следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть для некоторого $M \in \mathbb{N}$ верно представление

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1M} & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & \dots & b_{nM} & 0 & \dots \end{pmatrix} \in l_q^n.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

1) для всех $r \in [1; \infty)$ и $p > 1$ вычисление $\|B'\|_{l_q^n}^r$ сводится к решению задачи выпуклого программирования:

$$\left(\|B'\|_{l_q^n}^r\right) = \max_{\sum_{k=1}^M |u_k|^p = 1} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^M b_{ik} u_k \right|^r;$$

2) для всех $r \in [1; \infty)$ и $p > 1$

$$\|B'\|_{l_q^n} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^M |b_{ik}|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}};$$

3) если $M = 1$, то

$$\|B'\|_{l_q^n} = \left(\sum_{i=1}^n |b_{i1}|^r \right)^{\frac{1}{r}};$$

4) если $r = p = 2$, то

$$\|B'\|_{l_q^n} = \sqrt{\max_{\lambda \in \sigma(B^T B)} |\lambda|},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nM} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times M},$$

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - \text{собственное значение } A\};$$

5) если $r = \infty$, то

$$\|B'\|_{l_q^n} = \max_{i=\overline{1, n}} \left(\sum_{k=1}^M |b_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}};$$

если $r = 1$, то

$$\|B'\|_{l_q^n} = \max_{\substack{\gamma_i \in \{-1; 1\} \\ i=\overline{1, n}}} \left(\sum_{k=1}^M \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i b_{ik} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 5 позволяет использовать внешние оценки, полученные в теоремах 3 и 4, при любом значении параметра r . Однако с точки зрения удобства наиболее подходящими являются значения $r = 1$ и $r = \infty$, так как в данных случаях известны аналитические выражения для α_r , β_r и $\|Y_M\|_{l_q^n}$, $\|X_M\|_{l_q^n}$, а шар $\mathcal{B}_R^r(0)$ является многогранником:

$$\mathcal{B}_R^1(0) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_R^\infty(0) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} : \gamma_i \in \{-1; 1\}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

6. Примеры

Продемонстрирующие результаты теорем 3–5 на примерах.

Пример 1. Пусть для $p = \frac{4}{3}$ система (1) имеет следующие матрицы:

$$(15) \quad A = 0,9 \begin{pmatrix} \cos(2) & \sin(2) \\ -\sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два значения $r \in \{1, \infty\}$. Положим $M = 4$. Тогда соответствующие операторные нормы A^M , определяемые соотношениями (14), примут значения

$$\alpha_1 = \alpha_\infty = 0,4648.$$

С учетом пп. 5 и 6 теоремы 5 справедливы равенства

$$\|Y_M\|_{l_4^r} = \begin{cases} 4,0976, & r = 1, \\ 2,4962, & r = \infty. \end{cases}$$

Вычислим согласно теореме 3 значение R_N для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$. В случае $r = 1$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 3,5592, \quad R_2 = 1,6545, \quad R_3 = 0,7691, \quad R_4 = 0,3575.$$

В случае $r = \infty$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 2,1681, \quad R_2 = 1,0078, \quad R_3 = 0,4685, \quad R_4 = 0,2178.$$

Тогда можно построить оценки множества $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}, \infty}^4$ согласно теореме 3. Результаты представлены на рис. 1 и 2. Множества $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}^4(4)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}^4(8)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}^4(12)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}^4(16)$ построены на основе метода, представленного в [19]. Пунктирными линиями обозначены внешние оценки множества $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}, \infty}^4$ для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ при $r = 1$ на рис. 1 и при $r = \infty$ на рис. 2.

Пример 2. Пусть для $p = 4$ система (1) имеет следующие матрицы:

$$(16) \quad A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два значения $r \in \{1, \infty\}$. Положим $M = 4$. Тогда соответствующие операторные нормы A^M , определяемые соотношениями (14), примут значения

$$\alpha_1 = 0,5791, \quad \alpha_\infty = 0,7486.$$

С учетом пп. 5 и 6 теоремы 5 справедливы равенства

$$\|Y_M\|_{l_4^r} = \begin{cases} 6,8891, & r = 1, \\ 3,6717, & r = \infty. \end{cases}$$

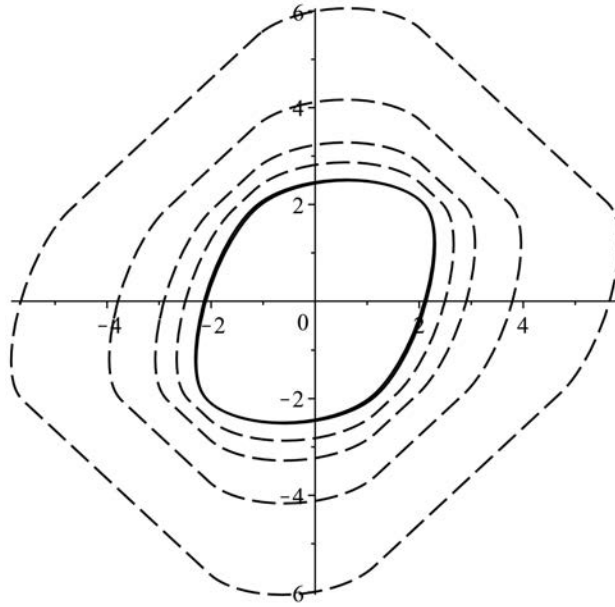


Рис. 1. Множества достижимости $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(4)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(8)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(12)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3},\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = 1$ и матриц системы (15).

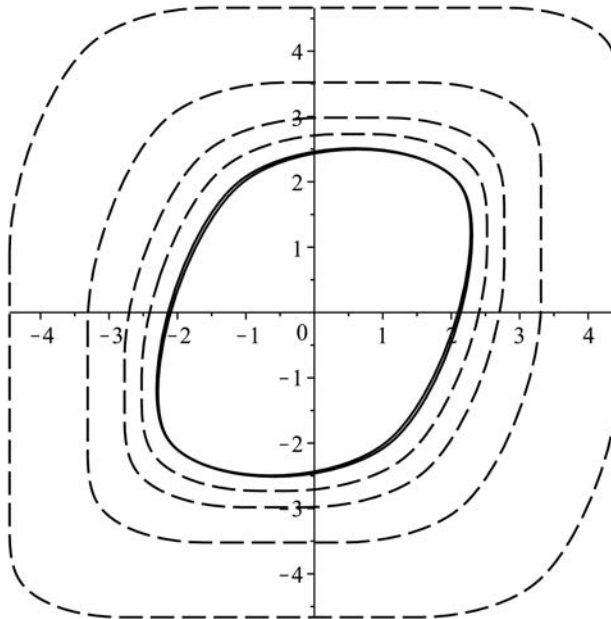


Рис. 2. Множества достижимости $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(4)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(8)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(12)$, $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3}}(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{\frac{4}{3},\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = \infty$ и матриц системы (15).

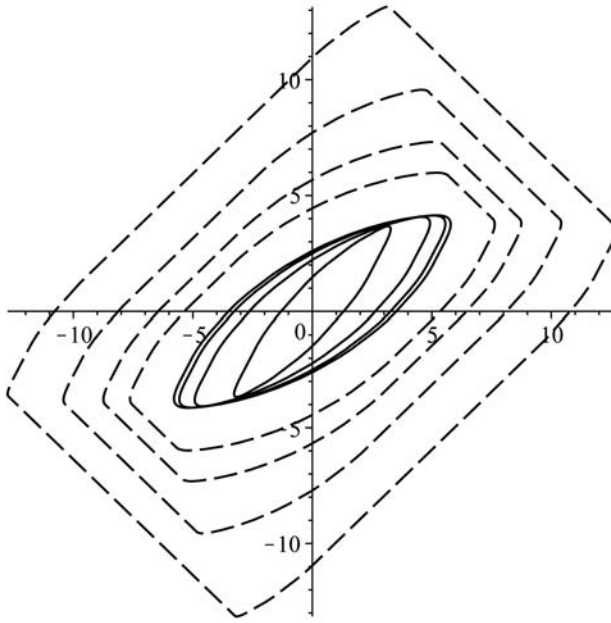


Рис. 3. Множества достижимости $\mathcal{Y}_4(4)$, $\mathcal{Y}_4(8)$, $\mathcal{Y}_4(12)$, $\mathcal{Y}_4(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = 1$ и матриц системы (16).

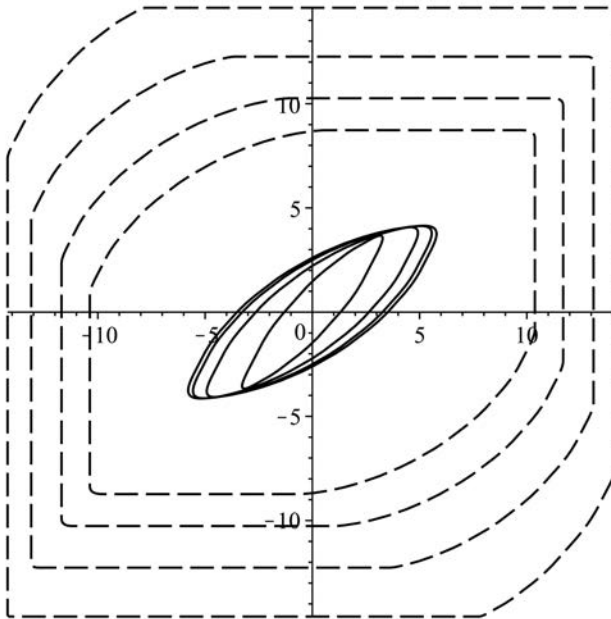


Рис. 4. Множества достижимости $\mathcal{Y}_4(4)$, $\mathcal{Y}_4(8)$, $\mathcal{Y}_4(12)$, $\mathcal{Y}_4(16)$ (сплошные линии) и оценки $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ (пунктирные линии), полученные на основе теоремы 3 для $r = \infty$ и матриц системы (16).

Вычислим согласно теореме 3 значение R_N для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$. В случае $r = 1$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 9,4784, R_2 = 5,4890, R_3 = 3,1887, R_4 = 1,8408.$$

В случае $r = \infty$ получим следующие результаты:

$$R_1 = 10,9333, R_2 = 8,1847, R_3 = 6,1271, R_4 = 4,5867.$$

Тогда можно построить оценки множества $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ согласно теореме 3. Результаты представлены на рис. 3 и 4. Множества $\mathcal{Y}_4(4)$, $\mathcal{Y}_4(8)$, $\mathcal{Y}_4(12)$, $\mathcal{Y}_4(16)$ построены на основе метода, представленного в [19]. Пунктирными линиями обозначены внешние оценки множества $\mathcal{Y}_{4,\infty}$ для различных $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ при $r = 1$ на рис. 3 и при $r = \infty$ на рис. 4.

В примере 1 точность аппроксимации оказалась выше для $r = \infty$, в то время как в примере 2 более качественные результаты получаются при $r = 1$. В общем случае допустимо вычислить оценки для различных значений параметра $r \in [1; \infty]$, а итоговую оценку рассматривать в виде их пересечения.

Пример 3. Рассмотрим отдельно случай $p = 2$, для которого предельные множества достижимости можно построить явно на основе леммы 3. Отметим, что с точки зрения леммы 3 не существенно, являются собственные значения матрицы A действительными или комплексными. В промежуточных вычислениях при построении матрицы $H_{y,\infty}$ могут использоваться комплексные числа, но результирующая матрица квадратичной формы, которая определяет структуру $\mathcal{Y}_{2,\infty}$, в любом случае окажется действительной.

Для случая (15) верно, что

$$\lambda_1 = -0,3329 + 0,7274i, \lambda_2 = -0,3329 - 0,7274i, S = \begin{pmatrix} 0,7071 & 0,7071 \\ 0,7071i & -0,7071i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i & 4 \\ 4 & 4i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8625 - 2,5257i & 11,1111 \\ 11,1111 & -0,8625 + 2,5257i \end{pmatrix}.$$

Отсюда окончательно получим

$$H_{y,\infty} = \begin{pmatrix} 0,1029 & -0,0217 \\ -0,0217 & 0,0881 \end{pmatrix}.$$

Результаты представлены на рис. 5. Множества $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ построены на основе метода из [19].

Аналогично для случая (16) верно, что

$$\lambda_1 = -0,8, \lambda_2 = -0,7, S = \begin{pmatrix} 1 & -0,8944 \\ 0 & 0,4472 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 22,3607 \\ 22,3607 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,4444 & 50,8197 \\ 50,8197 & 39,5197 \end{pmatrix}.$$

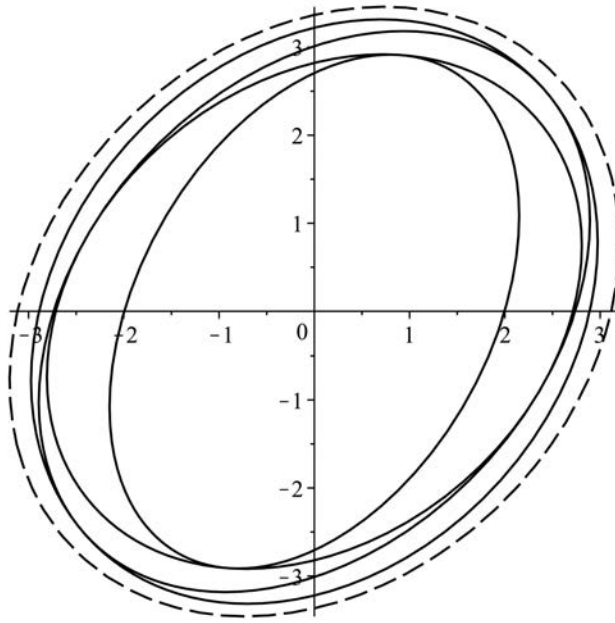


Рис. 5. Множества достижимости $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ (сплошные линии) и $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ (пунктирная линия), полученные на основе леммы 3 и матриц системы (15).

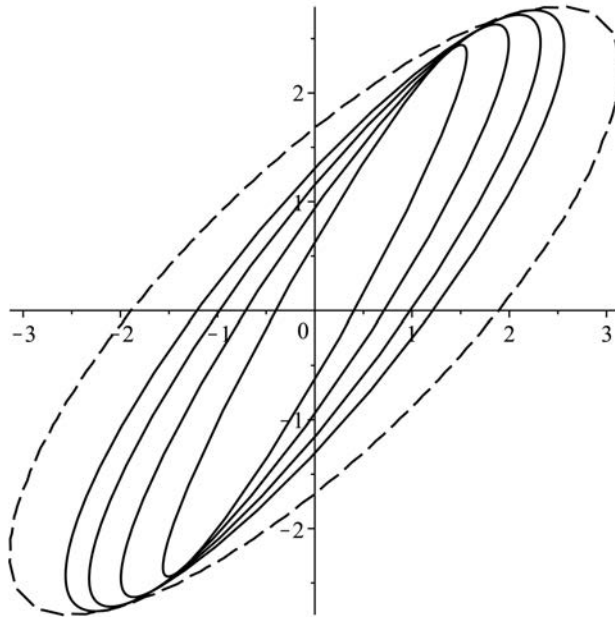


Рис. 6. Множества достижимости $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ (сплошные линии) и $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ (пунктирная линия), полученные на основе леммы 3 и матриц системы (16).

Отсюда окончательно получим

$$Hy_{,\infty} = \begin{pmatrix} 0,2788 & -0,2503 \\ -0,2503 & 0,3522 \end{pmatrix}.$$

Результаты представлены на рис. 6. Множества $\mathcal{Y}_2(2)$, $\mathcal{Y}_2(3)$, $\mathcal{Y}_2(4)$, $\mathcal{Y}_2(5)$ построены на основе метода из [19].

Пример 4. С учетом соотношений (12) и (11) результаты примера 1 и рис. 1 и 2 соответствуют аналогичным построениям для множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}_{\frac{4}{3}}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\mathcal{X}_{\frac{4}{3},\infty}$ при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$:

$$A = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) \\ \sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{10}{9}(\cos(2) - \sin(2)) \\ \frac{10}{9}(\cos(2) + \sin(2)) \end{pmatrix}.$$

Также результаты примера 2 и рис. 3 и 4 соответствуют аналогичным построениям для множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}_4(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\mathcal{X}_{4,\infty}$ при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{5}{14} \\ 0 & \frac{10}{7} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{15}{28} \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}.$$

7. Заключение

В статье рассмотрена задача построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление. Продемонстрировано, что в общем случае вычисление функционала Минковского для данных множеств сводится к операции проектирования шара из нормированного пространства l_p на конечномерное фазовое пространство и к решению систем нелинейных уравнений. Для случая квадратичных ограничений и диагонализруемой матрицы системы составленные уравнения удается решить аналитически, что позволяет описать функционал Минковского в явном виде. В общем случае предельные множества достижимости и 0-управляемости удается представить в виде неподвижных точек сжимающего отображения в метрическом пространстве компактов, коэффициент сжатия которого возможно вычислить численно. Данный факт позволяет оценить погрешность метода простой итерации при построении исследуемых множеств, что в сочетании со свойствами метрики Хаусдорфа приводит к возможности построить их внешние оценки произвольного порядка точности. В частном случае при выборе в качестве нормы в фазовом пространстве нормы Минковского или Чебышева результирующие оценки обладают полиэдральной структурой.

В дальнейшем предполагается обобщить полученные результаты на системы с векторным управлением. В частности, для этого требуется разработать модель учета суммарных ограничений, например, посредством использования функционала Минковского относительно некоторого «ценового» множества. Другой проблемой является построение рекуррентного описания для множеств достижимости и 0-управляемости, которое позволило бы искать их предельные аналоги в виде неподвижных точек подобно результатам, полученным для случая отдельных ограничений на управление в каждый момент времени [15].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. По определению функционала Минковского для любого $x \in \mathbb{L}_2$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \mu(x, BU) &= \inf\{t > 0: x \in tBU\} = \inf\{t > 0: \exists u \in tU, x = Bu\} = \\ &= \inf\{t > 0: \exists u \in B^{-1}(\{x\}), u \in tU\} = \inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \inf\{t > 0: u \in tU\} = \\ &= \inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \mu(u, U). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Поскольку в силу теоремы Рисса оператор B линеен и ограничен, то согласно лемме 1

$$(П.1) \quad (\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty)))^p = \left(\inf_{u \in B^{-1}(\{x\})} \mu(u, \mathcal{E}_p(\infty)) \right)^p = \inf_{\substack{Bu=x \\ u \in l_p}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p.$$

Для решения оптимизационной задачи (П.1) воспользуемся методом множителей Лагранжа для бесконечномерных пространств [29]. Функция Лагранжа для $\lambda \in \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$L(u, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p + \lambda^T(x - Bu).$$

Тогда поиск минимума в задаче (П.1) сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \\ Bu = x, \end{cases} \quad \begin{cases} pI_p(u) - B^* \lambda = 0, \\ Bu = x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = I_p^{-1} \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right) = I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right), \\ Bu = x. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (П.1) и тождества $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p = (u, I_p(u))$ следует, что

$$\begin{aligned} (\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty))^p &= \left(I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right), I_p \left(I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right) \right) \right) = \\ &= \left(I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right), \frac{1}{p} B^* \lambda \right) = \left\| \frac{1}{p} B^* \lambda \right\|_{l_q}^q, \\ B I_q \left(\frac{1}{p} B^* \lambda \right) &= x. \end{aligned}$$

Переобозначив $\frac{1}{p}\lambda$ на λ , окончательно получим

$$\mu(x, B\mathcal{E}_p(\infty)) = \|B^* \lambda\|_{l_q}^{\frac{q}{p}} = \|B^* \lambda\|_{l_q}^{q-1},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^n$ определяется из (10).

Лемма 2 доказана.

Доказательство следствия 1. По определению оператор I_2 является тождественным. Тогда условие (10) примет вид

$$BB^* \lambda = x.$$

Поскольку B сюръективен, то оператор $BB^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и порождающая его матрица обратимы, что приводит к соотношению

$$\lambda = (BB^*)^{-1}x.$$

С учетом леммы 2 получим

$$\begin{aligned} \mu(x, B\mathcal{E}_2(\infty)) &= \|B^*(BB^*)^{-1}x\|_2 = \sqrt{(B^*(BB^*)^{-1}x, B^*(BB^*)^{-1}x)} = \\ &= \sqrt{x^T (BB^*)^{-1}x}. \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано.

Доказательство леммы 3. Положим $B = Y_{\infty}$. Тогда с учетом спектрального разложения матрицы $A = S\Lambda S^{-1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ верны равенства

$$\begin{aligned} b_k b_k^T &= A^{k-1} b b^T (A^{k-1})^T = S \Lambda^{k-1} S^{-1} b b^T (S^{-1})^T \Lambda^{k-1} S^T = \\ &= S \text{diag}(\lambda_1^{k-1}, \dots, \lambda_n^{k-1}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{diag}(\lambda_1^{k-1}, \dots, \lambda_n^{k-1}) S^T = \\ &= S \begin{pmatrix} (\lambda_1 \lambda_1)^{k-1} \alpha_{11} & \dots & (\lambda_1 \lambda_n)^{k-1} \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_n \lambda_1)^{k-1} \alpha_{n1} & \dots & (\lambda_n \lambda_n)^{k-1} \alpha_{nn} \end{pmatrix} S^T. \end{aligned}$$

В силу включения $b \in \mathbb{L}_{<1}$ коэффициенты α_{ij} равны нулю для всех $i, j = \overline{1, n}$ таких, что хотя бы одно из двух собственных значений λ_i или λ_j оказывается по модулю больше либо равно 1:

$$(П.2) \quad \alpha_{ij} = 0, \text{ если } |\lambda_i| \geq 1 \text{ или } |\lambda_j| \geq 1.$$

Отсюда с учетом выражения для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии следует равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_i \lambda_j)^{k-1} \alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{ij}}{1 - \lambda_i \lambda_j}, & |\lambda_i| < 1 \text{ и } |\lambda_j| < 1, \\ 0, & |\lambda_i| \geq 1 \text{ или } |\lambda_j| \geq 1, \end{cases}$$

которое в силу (П.2) совпадает с определением β_{ij} .

Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} BB^* &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_k^T = S \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 \lambda_1)^{k-1} \alpha_{11} & \dots & \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 \lambda_n)^{k-1} \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_n \lambda_1)^{k-1} \alpha_{n1} & \dots & \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_n \lambda_n)^{k-1} \alpha_{nn} \end{pmatrix} S^T = \\ &= S \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} S^T = H. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом следствия 1 вытекает равенство $H_{y, \infty} = H^{-1}$.

Второй пункт леммы 3 доказывается аналогично при переобозначении $B = X_{\infty}$.

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Доказательство вытекает непосредственно из (6) и (13).

Доказательство леммы 5. Доказательство вытекает непосредственно из (7) и (13).

Доказательство леммы 6. Так как все собственные значения матрицы A по модулю строго меньше 1, согласно [22, теорема 5.6.12] $\|A^k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Тогда по определению предела для $\alpha_r \in [0; 1)$ найдется $M \in \mathbb{N}$ такое, что $\|A^M\| = \sup_{\|x\|_r \leq 1} \|A^M x\|_r < \alpha_r$. Поскольку справедливо неравенство

$$\|A^M(x - y)\|_r \leq \|A^M\| \|x - y\|_r \leq \alpha_r \|x - y\|_r,$$

A^M является сжатием с коэффициентом $\alpha_r \in [0; 1)$.

Пусть $B' = (b_1, b_2, \dots) \in l_q^n$, $C' = (c_1, c_2, \dots) \in l_q^n$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(B') - \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(C') \right\|_{l_q^n} = \left\| (b, Ab, \dots, A^{M-1}b, A^M b_1, A^M b_2, \dots) - \right. \\
& \quad \left. - (b, Ab, \dots, A^{M-1}b, A^M c_1, A^M c_2, \dots) \right\|_{l_q^n} = \\
& = \left\| (0, \dots, 0, A^M(b_1 - c_1), A^M(b_2 - c_2), \dots) \right\|_{l_q^n} = \\
& = \left\| (A^M(b_1 - c_1), A^M(b_2 - c_2), \dots) \right\|_{l_q^n} = \\
& = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \left\| (A^M(b_1 - c_1), A^M(b_2 - c_2), \dots)u \right\|_r = \\
& = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A^M(b_k - c_k)u_k \right\|_r = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \left\| A^M \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k - A^M \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \right\|_r \leq \\
& \leq \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \alpha_r \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \right\|_r = \alpha_r \|B' - C'\|_{l_q^n}.
\end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство следствия 2. В силу теоремы 6 отображение $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$ – сжатие, при этом пространство l_q^n полное. Тогда в силу принципа сжимающих отображения Банаха [25] существует единственная неподвижная точка $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$. При этом по построению неподвижная точка отображения $\mathbf{F}_{A,b}$ должна являться также неподвижной точкой отображения $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$. С учетом леммы 4 единственной неподвижной точкой $\mathbf{F}_{A,b}^{(M)}$ является $Y_\infty \in l_q^n$. Откуда следует, что Y_∞ является единственной неподвижной точкой $\mathbf{F}_{A,b}$.

Заметим, что справедливо представление $\mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) = Y_{NM}$, где через $O: l_p \rightarrow \mathbb{R}_r^n$ обозначен нулевой оператор, который отождествляется с нулевой последовательностью $(0, 0, \dots) \in l_q^n$. Тогда согласно теореме 6

$$\begin{aligned}
& \|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} = \left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(Y_\infty) - \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}\left(\mathbf{F}_{A,b}^{(NM-M)}(O)\right) \right\|_{l_q^n} \leq \\
& \leq \alpha_r \left\| Y_\infty - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM-M)}(O) \right\|_{l_q^n} \leq \\
& \leq \alpha_r \left\| Y_\infty - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) \right\|_{l_q^n} + \alpha_r \left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM-M)}(O) \right\|_{l_q^n} \leq \\
& \leq \alpha_r \left\| Y_\infty - \mathbf{F}_{A,b}^{(NM)}(O) \right\|_{l_q^n} + \alpha_r^N \left\| \mathbf{F}_{A,b}^{(M)}(O) - O \right\|_{l_q^n} = \\
& = \alpha_r \|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} + \alpha_r^N \|Y_M\|_{l_q^n}, \\
& \|Y_\infty - Y_{NM}\|_{l_q^n} \leq \frac{\alpha_r^N}{1 - \alpha_r} \|Y_M\|_{l_q^n}.
\end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Доказательство вытекает из следствия 2 при замене A на A^{-1} , b на $A^{-1}b$ в совокупности с леммой 5 и тем фактом, что собственные значения A^{-1} взаимно обратны собственным значениям A [28].

Доказательство леммы 7. Рассмотрим величину

$$\begin{aligned}
& \rho_H(B'\mathcal{E}_p(\infty), C'\mathcal{E}_p(\infty)) = \\
& = \max \left\{ \sup_{x \in B'\mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{y \in C'\mathcal{E}_p(\infty)} \|x - y\|_r; \sup_{x \in C'\mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{y \in B'\mathcal{E}_p(\infty)} \|x - y\|_r \right\} = \\
& = \max \left\{ \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u - C'v\|_r; \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|C'u - B'v\|_r \right\}, \\
& \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|C'u - B'v\|_r = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u - C'v\|_r = \\
& = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u - C'u + C'u - C'v\|_r \leq \\
& \leq \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \inf_{v \in \mathcal{E}_p(\infty)} (\|B'u - C'u\|_r + \|C'u - C'v\|_r) = \\
& = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \left(\|(B' - C')u\|_r + \inf_{v \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|C'(u - v)\|_r \right) = \\
& = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|(B' - C')u\|_r = \|B' - C'\|_{l_q^n}.
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\rho_H(B'\mathcal{E}_p(\infty), C'\mathcal{E}_p(\infty)) \leq \|B' - C'\|_{l_q^n}.$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1. Доказательство следует непосредственно из следствия 2, представлений (11) и (8) и леммы 7.

Доказательство теоремы 2. Доказательство следует непосредственно из следствия 3, представлений (12) и (9) и леммы 7.

Доказательство теоремы 3. Как известно [27], для любых $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$, удовлетворяющих условию $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leq R$, верно включение

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{Y} + \mathcal{B}_R^r(0).$$

Отсюда с учетом теоремы 1 следует теорема 3.

Доказательство теоремы 4. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 при замене теоремы 1 на теорему 2.

Доказательство теоремы 5. 1). Пункт 1 следует из определения операторной нормы и того факта, что максимум выпуклой функции достигается на границе выпуклого множества [22]:

$$\begin{aligned} \|B'\|_{l_q^n} &= \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \|B'u\|_r = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p = 1} \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} u_k \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \\ &= \left(\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p = 1} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^M b_{ik} u_k \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\max_{\sum_{k=1}^M |u_k|^p = 1} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^M b_{ik} u_k \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

2). В силу неравенства Гельдера из п. 1 следует п. 2:

$$\begin{aligned} \|B'\|_{l_q^n} &\leq \left(\max_{\sum_{k=1}^M |u_k|^p = 1} \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^M |b_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^M |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^r \right)^{\frac{1}{r}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^M |b_{ik}|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

3). Также при $M = 1$ из п. 1 следует п. 3:

$$\|B'\|_{l_q^n} = \left(\max_{|u_1|^p = 1} \sum_{i=1}^n |b_{i1} u_1|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^n |b_{i1}|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

4). При $r = p = 2$ операторную норму можно представить в терминах скалярного произведения в \mathbb{R}_2^n :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Тогда с учетом п. 1 верно представление

$$\left(\|B'\|_{l_q^n} \right)^2 = \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^M: \\ (u, u) = 1}} (Bu, Bu) = \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^M: \\ (u, u) = 1}} (u, B^T B u).$$

Согласно методу множителей Лагранжа [29] точка максимума рассматриваемой оптимизационной задачи $u^* \in \mathbb{R}^M$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \nabla ((u, B^T B u) + \lambda(1 - (u, u))) = 0, \\ (u, u) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2B^T B - 2\lambda u = 0, \\ (u, u) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} (B^T B - \lambda I)u = 0, \\ (u, u) = 1. \end{cases}$$

Тогда по определению u^* является нормированным собственным вектором матрицы $B^T B$, соответствующим собственному значению λ^* , т.е.

$$\left(\|B'\|_{l_q^n}\right)^2 = (u^*, B^T B u^*) = (u^*, \lambda^* u^*) = \lambda^*.$$

П. 4 полностью доказан.

5). П. 5 следует из представления операторной нормы B' и теоремы Рисса о норме линейного и ограниченного функционала в l_p [25]:

$$\begin{aligned} \|B'\|_{l_q^n} &= \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \max_{i=1, n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} u_k \right| = \\ &= \max_{i=1, n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \max_{i=1, n} \left(\sum_{k=1}^M |b_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

6). Для доказательства п. 6 учтем представление $|\gamma| = \max\{\gamma, -\gamma\}$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ и рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \|B'\|_{l_q^n} &= \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} u_k \right| = \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{i=1}^n \max_{\gamma_i \in \{-1; 1\}} \left(\gamma_i \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} u_k \right) = \\ &= \max_{\substack{\gamma_i \in \{-1; 1\} \\ i=1, n}} \sup_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i b_{ik} \right) u_k \right| = \max_{\substack{\gamma_i \in \{-1; 1\} \\ i=1, n}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i b_{ik} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \max_{\substack{\gamma_i \in \{-1; 1\} \\ i=1, n}} \left(\sum_{k=1}^M \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i b_{ik} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Теорема 5 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Проной А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
 2. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *Авт. 2015. № 9. С. 3–30.*
<https://doi.org/10.1134/S0005231019030012>
- Ibragimov D.N., Siroitin A.N.* On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // *Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.*
<https://doi.org/10.1134/S0005117919030019>

3. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. № 3. С. 3–25.
<https://doi.org/10.1134/S0005231019030012>
Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
<https://doi.org/10.1134/S0005117919030019>
4. *Зайцева М.В., Точилин П.А.* Методы построения оценок множеств достижимости в задаче моделирования потоков людей // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 8. С. 1381–1394.
<https://doi.org/10.31857/S0044466923070190>
5. *Точилин П.А.* О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // *Дифференциальные уравнения.* 2015. Т. 51. № 11. С. 1503–1515. <https://doi.org/10.1134/S0374064115110114>
Tochilin P.A. On the construction of nonconvex approximations to reach sets of piecewise linear systems // *Differential Equations.* 2015. V. 51. No. 11. P. 1499–1511. <https://doi.org/10.1134/S0012266115110117>
6. *Kuntsevich V.M., Kurzhanski A.B.* Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control // *J. Autom. Inform. Sci.* 2010. V. 42. No. 1. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i1.10>
7. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *АиТ.* 2003. № 12. С. 17–32.
Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // *Autom. Remote Control.* 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.
<https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000008423.93495.be>
8. *Colonus F., Cossich J.A.N., Santana A.J.* Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems // *J. Dynam. Different. Equat.* 2022. Vol. 34. P. 5–22. <https://doi.org/10.1007/s10884-021-09966-4>
9. *Darup M.S., Monnigmann M.* On general relations between null-controllable and controlled invariant sets for linear constrained systems // *53rd IEEE Conference on Decision and Control.* Los Angeles. 2014. P. 6323–6328.
<https://doi.org/10.1109/CDC.2014.7040380>
10. *Ge S.S., Zhendong S., Lee T.H.* Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // *IEEE Transact. Autom. Control.* 2001. Vol. 46. No. 9. P. 1437–1441. <https://doi.org/10.1109/9.948473>
11. *Heemels W.P.M.H., Camlibel M.K.* Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // *Proc. 47th IEEE Conf. Decis. Control.* 2008. P. 3487–3492. <https://doi.org/10.1109/CDC.2008.4739333>
12. *Kaba M.D., Camlibel M.K.* A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // *SIAM J. Control Optim.* 2015. Vol. 53. No. 4. P. 2350–2372. <https://doi.org/10.1137/140960967>

13. *Benvenuti L., Farina L.* The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2006. Vol. 28. No. 2. P. 306–325. <https://doi.org/10.1137/040612531>
14. *Fucheng L., Mengyuan S., Usman* Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. P. 1–11. <https://doi.org/10.1155/2019/8434293>
15. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2023. № 2. С. 3–34. <https://doi.org/10.31857/S0005231023020010>
Berendakova A.V., Ibragimov D.N. About the Method for Constructing External Estimates of the Limit 0-Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 2. P. 97–120. <https://doi.org/10.25728/arcRAS.2023.95.43.001>
16. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // *Вычислительные технологии*. 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.
17. *Gayek J.E., Fisher M.E.* Approximating Reachable Sets for n-dimensional Linear Discrete Systems // *IMA J. Math. Control Inform.* V. 4. No. 2. 1987. P. 149–160. <https://doi.org/10.1093/imamci/4.2.149>
18. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиروتин А.Н., Сыпало К.И.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1 -ограничениями // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2022. № 4. С. 3–21. <https://doi.org/10.31857/S0002338822040102>
Ibragimov D.N., Osokin A.V., Sirotin A.N., Sypalo K.I. On the Properties of the Limit Control Sets for a Class of Unstable Linear Systems with Discrete Time and l_1 -Restrictions // *J. Comput. Syst. Int.* 2022. Vol. 61. No. 4. P. 467–484. <https://doi.org/10.1134/S1064230722040104>
19. *Ибрагимов Д.Н., Сиروتин А.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2023. № 6. С. 3–32. <https://doi.org/10.31857/S0002338823050086>
20. *Tobler W.R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // *IEEE-CGA*. 1981. V. 1. No. 1. P. 11–23. <https://doi.org/10.1109/MCG.1981.1673799>
21. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // *J. Geophys. Research*. 1973. V. 78. No. 11. P. 1753–1759. <https://doi.org/10.1029/JB078i011p01753>
22. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
23. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
24. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441>
25. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
26. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966.

27. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: ПОСТМАРКЕТ, 2000.
28. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
29. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 29.10.2023

После доработки 04.04.2024

Принята к публикации 11.04.2024

© 2024 г. О.Б. ЦЕХАН, канд. физ.-мат. наук (tsekhan@grsu.by)
(Гродненский государственный университет им. Янки Купалы)

КОМПОЗИТНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с малым параметром μ при части производных и квазидифференцируемыми коэффициентами установлены условия существования и построены μ -асимптотические композитные наблюдатели полного и редуцированного порядков. Ошибка оценивания состояния с произвольным наперед заданным показателем экспоненциального убывания сходится к бесконечно малой величине того же порядка малости, что и малый параметр. Векторы коэффициентов усиления наблюдателей выражены через коэффициенты усиления не зависящих от малого параметра подсистем меньшей размерности, чем исходная, а на параметры исходной системы накладываются требования более слабые, чем ранее известные. Приведен конструктивный алгоритм расчета вектора коэффициентов усиления композитного наблюдателя.

Ключевые слова: робастный наблюдатель, нестационарная сингулярно возмущенная система, квазидифференцируемость.

DOI: 10.31857/S0005231024040029, EDN: ZGWO0J

1. Введение

Проблема оценивания состояний динамических систем по доступной информации актуальна в связи с ее важностью для различных систем позиционирования (определения местоположения) объектов управления. Однако в реальных ситуациях непосредственное измерение вектора состояния может быть затруднительно (по соображениям стоимости, из-за технологических ограничений и т.п.). В таком случае оценивать состояния можно с помощью специально построенной динамической системы, называемой наблюдателем (оценщиком, эстиматором, идентификатором). На вход наблюдателя подается выходная функция исходной системы, а его состояние должно в том или ином смысле приближать состояние исходной системы [1–6]. Если с увеличением времени состояние наблюдателя сходится к фазовому вектору системы,

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»).

то наблюдатель называется *асимптотическим*. Если, кроме того, имеет место экспоненциальная сходимость, то такой наблюдатель называется *экспоненциальным*.

Определение наблюдателя впервые введено Люенбергером в его диссертации в 1963 г. (см. также [7, 8]). Он показал, что для каждой наблюдаемой линейной системы может быть спроектирован наблюдатель, который сам является линейной системой, с ошибкой оценивания, стремящейся к нулю с заданной скоростью. При этом задача построения наблюдателя сводится к выбору коэффициента усиления, который рассчитывается по параметрам системы и не зависит от выхода [8].

Сингулярно возмущенные системы (СВС) с малым параметром μ при частоте производных широко распространены в приложениях в авиации, химии, электротехнике, механике и др. как модели многотемповых процессов при моделировании динамики летательных аппаратов, химических реакций, движений роботов-манипуляторов и т.п. (см. обзоры [9–13] и ссылки там). Для СВС в зависимости от информации о малом параметре и потребностей приложений можно рассматривать различные постановки задач наблюдения: при известном значении малого параметра μ [14], при известном замкнутом интервале значений малого параметра $\mu \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}] \subset (0, \mu^0)$ [15], при неизвестном значении малого параметра μ [16]. Выделяют также постановки в зависимости от состава оцениваемых компонент: наблюдение как медленных, так и быстрых компонент, или только медленных компонент (см. [10] и ссылки там). В приложениях точное значение малого параметра μ может быть неизвестно. Поэтому важно, чтобы наблюдатели обеспечивали «хорошую» оценку состояния всему μ -параметрическому семейству СВС при различных реализациях параметра μ . Наблюдатели, обеспечивающие получение оценок состояний системы в условиях, когда модель системы точно не известна, называются *робастными* наблюдателями.

В зависимости от размерности наблюдателя выделяют [1, с. 379] *наблюдатели полного порядка*, состояние которых имеет ту же размерность, что и состояние наблюдаемой системы, а также *наблюдатели пониженного порядка*, размерность состояний которых меньше (на размерность выхода). Выделение в СВС быстрых динамик, при описании которых в модели появляется малый параметр, позволяет дополнительно редуцировать наблюдатели.

Использование многотемповой структуры СВС позволяет при построении наблюдателей оперировать системами меньшего размера, чем исходная – разделенными по временным шкалам подсистемами медленных и быстрых движений (см. [14, 16, 17]). При этом коэффициенты усиления для наблюдателя исходной СВС можно рассчитать в виде композиции коэффициентов усиления отдельно спроектированных наблюдателей медленной и быстрой подсистем. Такой подход для построения композитного [14] наблюдателя применяется в [17] для линейных стационарных СВС (ЛССВС). В [16] для ЛССВС введено понятие и обосновано построение μ -асимптотических наблюдателей,

для которых ошибка оценивания состояния с произвольным наперед заданным показателем экспоненциального убывания сходится к бесконечно малой величине того же порядка малости, что и малый параметр. В [14] описана конструкция μ -асимптотического наблюдателя полного порядка линейной нестационарной СВС (ЛНСВС), однако правила построения таких наблюдателей там не приведены. Исследования по проектированию наблюдателей медленных состояний нелинейных СВС можно найти в [18–21] и цитируемых там работах.

Многие реальные динамические системы описываются моделями, параметры которых зависят от времени. Конструктивные методы анализа и синтеза нестационарных систем удается получить для систем, приводимых к стационарным [22]. Нестационарные системы могут возникать при линеаризации стационарных нелинейных систем. Линеаризация нестационарных систем может приводить к уменьшению гладкости параметров системы. Использование аппарата квазидифференцирования [23, 24] позволяет расширить класс нестационарных систем, для которых возможно получить конструктивные результаты.

При рассмотрении детерминированных систем наблюдения оценивание состояний предполагает наличие у системы определенного типа наблюдаемости. Для стационарной системы полная наблюдаемость гарантирует существование асимптотического наблюдателя [2]. Для нестационарной системы требуется ее равномерно полная наблюдаемость. Однако это свойство труднопроверяемо в терминах коэффициентов исходной системы наблюдения и поэтому с конструктивной точки зрения малоэффективно. Предложенный в [5] подход на основе техники квазидифференцирования позволяет конструктивно строить наблюдатели для равномерно наблюдаемых нестационарных систем, при этом ослабить известные требования гладкости коэффициентов.

Вопросы наблюдаемости СВС изучались ранее автором в [25–30]. Вклад данной работы состоит в том, что в отличие от [25–30] исследуется задача конструирования наблюдателей; в отличие от [5] рассматривается сингулярно возмущенная система; по сравнению с [14] разработан конструктивный алгоритм построения композитного экспоненциального наблюдателя ЛНСВС, при этом ослаблены требования на гладкость параметров системы; в отличие от [16, 17] рассматривается нестационарная СВС.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная нестационарная сингулярно возмущенная система (ЛНСВС)

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t), & x \in \mathbb{R}^{n_1}, & y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), & t \in T = [t_0, +\infty), \end{aligned}$$

со скалярным выходом

$$(2) \quad v(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \quad v \in \mathbb{R}, \quad t \in T = [t_0, +\infty).$$

Здесь μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $x(t)$ – неизвестный вектор медленных переменных, $y(t)$ – неизвестный вектор быстрых переменных, $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, $c_j(t)$, $j = 1, 2$, – непрерывные ограниченные на T матричные функции соответствующих размеров и вектор-строки функции соответственно, $v(t)$ – измеряемая выходная функция.

Пусть в ЛНСВС (1) реализовалось некоторое фиксированное значение параметра $\mu \in (0, \mu^0]$ и неизвестное начальное состояние

$$(3) \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y_0 \in \mathbb{R}^{n_2},$$

которые в силу системы (1), (2) породили недоступный непосредственно наблюдению процесс $\{(x(t), y(t)), t \in T\}$ и измеряемую (без ошибок) выходную функцию $v(t) = v(t, \mu, x_0, y_0)$, $t \in T$. Требуется по известной функции $v(t)$, $t \in T$, оценить неизвестное состояние $(x(t), y(t))$, $t \in T$. Для решения этой задачи будем строить асимптотический наблюдатель.

Обозначим: $n = n_1 + n_2$, $z' = (x', y')$, $z'_0 = (x'_0, y'_0)$, символ «'» (штрих) обозначает транспонирование. Определим по параметрам ЛНСВС (1), (2) вектор-функцию $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, а также зависящую от параметра $\mu > 0$ матричную функцию

$$(4) \quad A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{A_3(t)}{\mu} & \frac{A_4(t)}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1)–(3) можно представить в пространстве состояний \mathbb{R}^n как

$$(5) \quad (A_\mu, c) : \begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(t, \mu) z(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \\ v(t) &= c(t) z(t), \quad v \in \mathbb{R}, \quad t \in T, \\ z(t_0) &= z_0. \end{aligned}$$

Отождествим систему (5) с парой (A_μ, c) , состоящей из матричных функций $A(t, \mu)$ и $c(t)$. Представим матрицу $A(t, \mu)$ (4) в виде

$$(6) \quad A(t, \mu) = \text{diag} \left\{ E_{n_1}, \frac{1}{\mu} E_{n_2} \right\} A(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее E_k обозначает единичную $k \times k$ -матрицу.

В силу (6) систему (5), определяемую парой матричных функций $A(t)$, $c(t)$ и малым параметром $\mu \in (0, \mu^0]$, отождествим также со множеством $\{A, c, \mu\}$. Если параметр μ принимает всевозможные значения из интервала $(0, \mu^0]$, то получаем μ -параметрическое семейство систем $\{A, c\}_{\mu^0}$, которое рассматривается как единый математический объект, определенный на $T \times (0, \mu^0]$. Фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ выделяет из семейства $\{A, c\}_{\mu^0}$ конкретную систему (A_μ, c) .

Пусть ρ – некоторое положительное число.

Определение 1. Систему дифференциальных уравнений

$$(7) \quad \dot{w}(t) = A(t, \mu)w(t) + K(t, \mu)(v(t) - c(t)w(t)), \quad w \in \mathbb{R}^n,$$

назовем ρ -экспоненциальным наблюдателем полного порядка семейства систем $\{A, c\}_{\mu^0}$ с вектором коэффициентов усиления $K(t, \mu)$ и коэффициентом оценивания $c_\rho(\mu) > 0$, $\mu \in (0, \mu^0]$, если для любого $\bar{t} > t_0$ ошибка оценивания $\varepsilon(t, \mu) = z(t, \mu) - w(t, \mu)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\varepsilon(t, \mu)\| \leq c_\rho(\mu) \exp(-\rho(t - \bar{t})), \quad \forall t \geq \bar{t}, \forall \mu \in (0, \mu^0].$$

Метод построения ρ -экспоненциальных наблюдателей для равномерно наблюдаемых нестационарных систем с квазидифференцируемыми коэффициентами предложен в [5]. При любом фиксированном μ можно использовать этот метод для построения наблюдателя ЛНСВС (5). Однако при этом могут возникнуть следующие проблемы: в общем случае параметры наблюдателя будут зависеть от малого параметра, который может быть заранее неизвестен; при использовании метода из [5] требуется существование канонической формы Фробениуса и построение соответствующей матрицы преобразования для зависящей от параметра СВС большой размерности. При этом при $\mu \rightarrow 0$ матрица преобразования в общем случае будет плохо обусловленной, а элементы канонической формы Фробениуса стремятся к бесконечности. Поэтому актуальна разработка методов синтеза робастных по малому параметру наблюдателей, не использующих знание величины малого параметра и обеспечивающих «хорошие» оценки состояния при любых достаточно малых его значениях.

Условия робастной P -равномерной наблюдаемости линейной нестационарной двухтемповой ЛНСВС, необходимые для построения ρ -экспоненциальных наблюдателей, получены в [31].

Вектор-функцию $f(t, \mu)$ на интервале $[t^1, \infty)$, такую что существуют постоянные $\mu^* > 0$, $d > 0$, такие что евклидова норма $\|f(t, \mu)\|$ удовлетворяет неравенству $\|f(t, \mu)\| \leq d\mu \quad \forall \mu \in (0, \mu^*], \forall t \in [t^1, \infty)$, обозначим через $O(\mu)$.

Пусть $r(t, \mu) > 0$ – заданная ограниченная на $T \times (0, \mu^0]$ функция.

Определение 2. Систему (7) назовем ρ -экспоненциальным наблюдателем полного порядка с ограниченной на $T \times (0, \mu^0]$ ошибкой $r(t, \mu)$ для семейства систем $\{A, c\}_{\mu^0}$, если для любого $\bar{t} > t_0$ ошибка оценивания удовлетворяет неравенству $\|\varepsilon(t, \mu)\| \leq c_\rho(\mu) \exp(-\rho(t - \bar{t})) + r(t, \mu)$, $\forall t \geq \bar{t}$, $\forall \mu \in (0, \mu^0]$.

Если в (7) $K(t, \mu) = \text{diag} \{E_{n_1}, \frac{1}{\mu} E_{n_2}\} K(t)$, $c_\rho(\mu) \equiv c_\rho$, $\mu \in (0, \mu^0]$, и при некотором n , $n = 1, 2, 3, \dots$, верно $r(t, \mu) = O(\mu^n)$, $t \in T$, то (7) назовем робастным μ -асимптотическим ρ -экспоненциальным наблюдателем семейства ЛНСВС (5).

Введенные выше определения согласованы с понятиями из [5, 14, 16, 32].

Робастный μ -асимптотический ρ -экспоненциальный наблюдатель семейства $\{A, c\}_{\mu^0}$ ЛНСВС (5) выполняет равномерное (по μ) асимптотическое (по t) оценивание вектора состояния (x, y) любой системы семейства ЛНСВС (5) с ограниченной ошибкой, которая имеет порядок малости не меньше, чем μ . Его вектор коэффициентов усиления рассчитывается независимо от малого параметра и обеспечивает получение таких оценок состояний систем семейства ЛНСВС (5), что ошибка оценивания с произвольным наперед заданным экспоненциальным показателем сходится к бесконечно малой величине порядка малости не менее чем малый параметр.

Задача 1. Для ЛНСВС (1)–(2) построить робастный μ -асимптотический ρ -экспоненциальный наблюдатель. При этом коэффициент усиления должен выражаться через коэффициенты усиления не зависящих от малого параметра подсистем, построенных по ЛНСВС (1)–(2) и имеющих размерность меньше исходной.

3. Подсистемы ЛНСВС, их наблюдаемость и наблюдатели

3.1. Подсистемы ЛНСВС и их связь с ЛНСВС

Решение задач анализа и синтеза СВС зачастую упрощается при использовании асимптотической декомпозиции СВС на подсистемы меньшей размерности. В настоящей работе описан конструктивный метод построения наблюдателей для ЛНСВС, использующий асимптотическую декомпозицию ЛНСВС и реализованный через построение наблюдателей, связанных с ЛНСВС (1)–(2) [33] не зависящих от параметра μ вырожденной системы (ВС) и системы погранслоя (СП), которые получаются из сингулярно возмущенной системы, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$.

Пусть $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$, т.е. рассматривается стандартная ЛНСВС. Тогда ВС (медленная подсистема) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s(t) x_s(t), x_s(0) = x_0, v_s(t) = c_s(t) x_s(t), t \in T, \\ (8) \quad (A_s, c_s) : \quad A_s(t) &\triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \\ c_s(t) &\triangleq c_1(t) - c_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \end{aligned}$$

и является нестационарной n_1 -мерной системой. Отождествим ее с парой (A_s, c_s) .

СП (быстрая подсистема) для ЛНСВС (1)–(2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_f(\tau)}{d\tau} &= A_4(t_0)y_f(\tau), \quad v_f(\tau) = c_2(t_0)y_f(\tau), \\ (9) \quad (A_4(t_0), c_2(t_0)) : \quad \tau &= \frac{t - t_0}{\mu} \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_f(\tau) &= y(t_0 + \mu\tau) - A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0, \\ y_f(0) &= y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0, \end{aligned}$$

и является линейной стационарной n_2 -мерной системой. Отождествим ее с парой $(A_4(t_0), c_2(t_0))$.

Наряду со стационарной СП (9) введем t -семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ вида (9) с $A_4(t), c_2(t)$ (где $t \in T$ – фиксированное значение, рассматривается как параметр семейства) вместо $A_4(t_0), c_2(t_0)$. СП (9) выделяется из t -семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ при $t = t_0$.

Заметим, что ВС (A_s, c_s) (8) и t -семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) определяются для всего семейства $\{A, c\}_{\mu^0}$ сразу.

Следующее утверждение, которое следует из [33, теорема 6.1, с. 227], устанавливает связь между решениями ЛНСВС (1), (3) и ее подсистем (8), (9).

Утверждение 1. Пусть корни $\lambda(A_4(t))$ характеристического уравнения $\det(\lambda E_{n_2} - A_4(t)) = 0$ матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < -\gamma < 0 \quad \forall t \in T, \gamma = \operatorname{const} > 0; A_i(t), i = \overline{1, 4}$ непрерывно дифференцируемы на $T, A_k(t), k = \overline{2, 4}$, ограничены на T . Тогда существует $\mu^* > 0$ такое, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ функции

$$x^1(t) = x_s(t), \quad y^1(t) = y_f \left(\frac{t - t_0}{\mu} \right) - A_4^{-1}(t) A_3(t) x_s(t), \quad t \in T,$$

где $x_s(t), y_f(t)$ – решения ВС (8) и СП (9), являются равномерными на $t \in T$ асимптотическими аппроксимациями 1-го порядка решения задачи (1), (3):

$$x(t) = x^1(t) + O(\mu), \quad y(t) = y^1(t) + O(\mu), \quad t \in T.$$

3.2. Наблюдаемость подсистем

В настоящей работе при построении наблюдателей для ВС (8) используется метод, налагающий более слабые требования на гладкость функций по сравнению с ранее известными, при этом используется понятие квазидифференцируемости относительно некоторой нижнетреугольной матрицы P_s , системы класса $\{P_s, n_1 - 1\}$ и равномерной наблюдаемости ВС. Введем связанные с этим понятия.

Для произвольного целого неотрицательного числа k обозначим через $\mathcal{U}_k(T)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $((k + 1) \times (k + 1))$ с непрерывными на T элементами $p_{ji}(t)$ ($j, i = 0, 1, \dots, k$), удовлетворяющими условию $p_{jj}(t) \neq 0$ ($t \in T$), ($j = 0, 1, \dots, k$). Для произвольной матрицы $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_k(T)$ и непрерывной функции $w : T \rightarrow \mathbb{R}$ квазипроизводные ${}^j_P w(t)$ порядка j ($j = 0, 1, \dots, k$) относительно матрицы $P(t)$ определяются по рекуррентным правилам [23]:

$$\begin{aligned} (10) \quad {}^0_P w(t) &= p_{00}(t)w(t), \quad {}^1_P w(t) = p_{11}(t) \frac{d({}^0_P w(t))}{dt} + p_{10}(t)({}^0_P w(t)), \dots, \\ {}^j_P w(t) &= p_{jj}(t) \frac{d({}^{j-1}_P w(t))}{dt} + \sum_{i=0}^{j-1} p_{ji}(t)({}^i_P w(t)) \quad (j = 2, 3, \dots, k). \end{aligned}$$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (10) выполнимы и приводят к непрерывным функциям.

Пусть задана некоторая матрица $P_s \in \mathcal{U}_{n_1}(T)$. Для ВС (8), следуя [24, с. 31], введем

Определение 3. ВС (A_s, c_s) имеет P_s -класс m , если всякая ее выходная функция $v_s(t) = v_s(t, x_0)$, $t \in T$, имеет непрерывные квазипроизводные относительно матрицы P_s до порядка m включительно.

Применяя к системе (8) Лемму 2.1 из [24, с. 32] получаем

Утверждение 2. ВС (8) имеет P_s -класс $n_1 - 1$ тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, \dots, n_1 - 1$ существуют и непрерывны вектор-строки

$$(11) \quad \begin{aligned} s_{s0}(t) &= p_{s,00}(t)c_s(t), \quad s_{sj}(t) = \\ &= p_{s,jj}(t)(s_{s,j-1}(t)A_s(t) + \dot{s}_{s,j-1}(t)) + \sum_{i=0}^{j-1} p_{s,ji}(t)s_{si}(t). \end{aligned}$$

В частности, ВС (8) имеет класс $\{P_s, n_1 - 1\}$ относительно $(n_1 \times n_1)$ -матрицы P_s вида (18) из [5], построенной по параметрам ВС (8).

Определение 4. ВС (A_s, c_s) (8) класса $\{P_s, n_1 - 1\}$ называется P_s -равномерно наблюдаемой на отрезке T , если при любом $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ отображение

$$x_s(t) \rightarrow ({}^0_P v_s(t), {}^1_P v_s(t), \dots, {}^{n_1-1}_P v_s(t)), \quad v_s(t) = v_s(t, x_0)$$

инъективно для каждого $t \in T$.

Определение 5. Назовем t -семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) полностью наблюдаемым на T_μ , если любая подсистема из t -семейства ($t \in T$) полностью наблюдаема [34, с. 68; 24, с. 29].

Пусть ВС (A_s, c_s) (8) имеет P_s -класс $n_1 - 1$. Определим $(n_1 \times n_1)$ -матрицу наблюдаемости ВС (A_s, c_s) :

$$S_{P_s}(t) = \begin{pmatrix} s_{s0}(t) \\ s_{s1}(t) \\ \dots \\ s_{s,n_1-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (t \in T),$$

где n_1 -вектор-строки $s_{sj}(t)$, $j = 1, 2, \dots$ определяются по формулам (11) и $(n_2 \times n_2)$ -матрицу наблюдаемости t -семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$:

$$(12) \quad S_f(t) = \begin{pmatrix} s_{f0}(t) \\ s_{f1}(t) \\ \dots \\ s_{f,n_2-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (t \in T),$$

где n_2 -вектор-строки $s_{f0}(t), s_{f1}(t), \dots$ определяются по формулам

$$(13) \quad s_{fj}(t) = s_{f,j-1}(t)A_4(t), \quad s_{f0}(t) = c_2(t).$$

Применяя к ВС (8) и t -семейству быстрых подсистем (9) условия из [34, с. 68; 35, с. 89], получаем

Утверждение 3. ВС (8) P_s -класса $n_1 - 1$ является P_s -равномерно наблюдаемой на T тогда и только тогда, когда $\text{rank } S_{P_s}(t) = n_1$ для любого $t \in T$.

Утверждение 4. t -Семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) полностью наблюдаемо тогда и только тогда, когда $\text{rank } S_f(t) = n_2$ для любого $t \in T$.

3.3. Наблюдатели подсистем

Пусть ρ_s, ρ_f – некоторые положительные числа.

Определение 6. Систему дифференциальных уравнений

$$(14) \quad \dot{w}_s(t) = A_s(t)w_s(t) + k_s(t)(v_s(t) - c_s(t)w_s(t)), \quad w_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t > t_0,$$

назовем ρ_s -экспоненциальным наблюдателем ВС (A_s, c_s) (8) с вектором коэффициентов усиления $k_s(t)$ и константой оценивания $c_{\rho_s} > 0$, если ошибка оценивания $\varepsilon_s(t) = x_s(t) - w_s(t)$ удовлетворяет неравенству $\|\varepsilon_s(t)\| \leq c_{\rho_s} \exp(-\rho_s(t - \bar{t}))$, $t \geq \bar{t}$, для любого $\bar{t} > t_0$.

Определение 7. Систему дифференциальных уравнений

$$(15) \quad \frac{dw_f(\tau)}{d\tau} = A_4(t)w_f(\tau) + k_f(t)(v_f(\tau) - c_2(t)w_f(\tau)), \\ w_f \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tau > 0, \quad t \in T,$$

назовем ρ_f -экспоненциальным наблюдателем t -семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ с вектором коэффициентов усиления $k_f(t)$ и константой оценивания $c_{\rho_f} > 0$, если для любой системы t -семейства ($\forall t \in T$) ошибка $\varepsilon_f(\tau) = y_f(\tau) - w_f(\tau)$ удовлетворяет неравенству $\|\varepsilon_f(\tau)\| \leq c_{\rho_f} \exp(-\rho_f(\tau - \bar{\tau}))$, $\tau \geq \bar{\tau}$, для любого $\bar{\tau} > 0$.

Обозначим через $\mathcal{L}(n_1)$ множество всех обратимых непрерывно дифференцируемых на T $(n_1 \times n_1)$ -матриц, ограниченных на T вместе со своими обратными. Множество $\mathcal{L}(n_1)$ является группой Ляпунова [36]. Действие группы $\mathcal{L}(n_1)$ на паре (A, c) , состоящей из $(n_1 \times n_1)$ -матричной функции и n_1 -вектор-строки с непрерывными на T элементами, зададим правилом [24, с. 42]

$$(16) \quad G * (A, c) = \left(G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G}, cG \right), G \in \mathcal{L}(n_1).$$

Используя [5, 31], несложно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Утверждение 5. Если для некоторой $P_s \in \mathcal{U}_{n_1}(T)$ ВС (8) P_s -равномерно наблюдаема и для нее существует каноническая форма Фробениуса (A_s^0, c_s^0)

$$(17) \quad A_s^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n_1-1} \end{pmatrix}, \quad c_s^0(t) = (0, 0, \dots, 0, 1)'$$

относительно действий группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$, то для любого $\rho_s > 0$ существует ρ_s -экспоненциальный наблюдатель (14).

Утверждение 6. Если семейство быстрых подсистем (9) полностью наблюдаемо, то для любого $\rho_f > 0$ существует ρ_f -экспоненциальный наблюдатель (15).

Наблюдатели для ВС (8) и t -семейства (9) можно построить, применяя метод построения ρ -экспоненциальных наблюдателей из [5, Теорема 5].

3.3.1. Схема построения ρ -экспоненциального наблюдателя для нестационарной ВС (8)

1. Пусть ВС (8) равномерно наблюдаема (утверждение 3) и для нее существует каноническая форма Фробениуса (A_s^0, c_s^0) относительно действий группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$ [24, с. 69]. Обозначим через $\alpha_s(t) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-1})'$ n_1 -вектор-столбец коэффициентов матрицы $A_s^0(t)$.

2. Находим преобразование $G_s(t) \in \mathcal{L}(n_1)$, для которого справедливо $G_s * (A_s, c_s) = (A_s^0, c_s^0)$.

Заметим, что для построения канонической формы Фробениуса и соответствующей матрицы преобразования $G_s(t)$ из группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$ можно использовать метод, описанный в [5; 24, с. 81]

3. Выберем действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$, удовлетворяющие для заданного $\rho > 0$ неравенству $\lambda_i < -\rho$, $i = 1, \dots, n_1$.

4. Построим многочлен $(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2) \dots (\xi - \lambda_{n_1}) = \xi^{n_1} - \beta_{n_1-1}\xi^{n_1-1} - \dots - \beta_1\xi - \beta_0$ и пусть $\beta_s = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n_1-1})'$ - n_1 -вектор-столбец.

5. Рассчитаем вектор коэффициентов усиления $k_s(t)$ для наблюдателя ВС (14):

$$(18) \quad k_s(t) = G_s(t)(\alpha_s(t) - \beta_s).$$

3.3.2. Схема построения ρ -экспоненциального наблюдателя для t -семейства стационарных быстрых подсистем

1. Пусть t -семейство быстрых подсистем (9) полностью наблюдаемо (утверждение 4). Под канонической формой Фробениуса (A_f^0, c_f^0) t -семей-

ства (9) будем понимать совокупность систем, каждая из которых является канонической формой Фробениуса соответствующей быстрой подсистемы. Чтобы найти ее, построим характеристический полином t -семейства (9). При каждом $t \in T$ его коэффициенты задают вектор $\alpha_f(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n_2-1}(t))'$ коэффициентов канонической формы Фробениуса соответствующей быстрой подсистемы.

2. Рассчитаем матрицу перехода к канонической форме Фробениуса для t -семейства быстрых подсистем: $G_f(t) = S_f^{-1}(t)S_f^0(t)$, где $S_f(t)$ и $S_f^0(t)$ – матрицы наблюдаемости t -семейства быстрых подсистем и его канонической формы Фробениуса, рассчитанные по формулам (12), (13) с матрицами $A_4(t)$, $c_2(t)$ и $A_f^0(t)$, $c_f^0(t)$ соответственно.

3. Выберем действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_2}$, удовлетворяющие для заданного положительного числа ρ неравенству $\lambda_i < -\rho$, $i = 1, \dots, n_2$.

4. Образуем n_2 -вектор $\beta_f = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-1})'$ с постоянными элементами такой, что $(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2) \cdots (\xi - \lambda_{n_2}) = \xi^{n_1} - \beta_{n_1-1}\xi^{n_2-2} - \dots - \beta_1\xi - \beta_0$.

5. Рассчитаем вектор коэффициентов усиления $k_f(t)$ для наблюдателя t -семейства СП (15):

$$(19) \quad k_f(t) = G_f(t) (\alpha_f(t) - \beta_f).$$

Заметим, что определенная таким образом функция $k_f(t)$, $t \in T$, наследует свойства гладкости и непрерывности функций $\alpha_f(t)$, а значит и коэффициентов $A_4(t)$, $c_2(t)$ t -семейства быстрых подсистем.

4. Композитный наблюдатель ЛНСВС

4.1. Робастный μ -асимптотический ρ -экспоненциальный наблюдатель ЛНСВС

Пусть $\rho > 0$ задано.

Теорема 1. Пусть

(i) для некоторой матрицы $P_s \in \mathcal{U}_{n_1}(T)$ выполнены условия утверждений 2, 3 и ВС (A_s, c_s) (8) обладает канонической формой Фробениуса относительно действия группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$;

(ii) для ВС (8) построен ρ -экспоненциальный наблюдатель с вектором коэффициентов усиления $k_s(t)$ (18) и константой оценивания c_{ρ_s} ;

(iii) выполнены условия утверждения 4;

(iv) для t -семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) построен $\mu^0 \rho$ -экспоненциальный наблюдатель с вектором коэффициентов усиления $k_f(t)$ (19) и константой оценивания c_{ρ_f} ;

(v) матричные функции

$$(20) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_1(t) &= A_1(t) - k_1(t)c_1(t), & \tilde{A}_2(t) &= A_2(t) - k_1(t)c_2(t), \\ \tilde{A}_3(t) &= A_3(t) - k_2(t)c_1(t), & \tilde{A}_4(t) &= A_4(t) - k_2(t)c_2(t), \end{aligned}$$

где

$$(21) \quad \begin{aligned} k_1(t) &= A_2(t)A_4^{-1}(t)k_f(t) + k_s(t)[E_{n_2} - c_2(t)A_4^{-1}(t)k_f(t)], \\ k_2(t) &= k_f(t), \end{aligned}$$

непрерывно дифференцируемы и ограничены, производные функций $\tilde{A}_i(t)$, $i = 2, 3, 4$, ограничены на T ;

$$(vi) \quad \operatorname{Re} \lambda(\tilde{A}_4(t)) \leq -\gamma_1 < 0, \quad \gamma_1 = \operatorname{const} > 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Тогда существует $\mu^* \in (0, \mu^0]$ такое, что система

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{w}_x(t) &= \tilde{A}_1(t)w_x(t) + \tilde{A}_2(t)w_y(t) + k_1(t)v(t), \quad w_x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad w_y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu \dot{w}_y(t) &= \tilde{A}_3(t)w_x(t) + \tilde{A}_4(t)w_y(t) + k_2(t)v(t), \quad t > t_0, \\ w_x(0) &= 0, \quad w_y(0) = 0, \end{aligned}$$

является робастным μ -асимптотическим ρ -экспоненциальным наблюдателем семейства $\{A, c\}_{\mu^*}$ ЛНСВС (5).

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Заметим, что требование существования канонической формы Фробениуса для ВС ослабляет требование существования канонической формы Фробениуса для исходной ЛНСВС. Например, система вида $\dot{x}(t) = |t - 1|x(t) + (1 - |t - 1|)y(t)$, $\mu \dot{y}(t) = tx(t) - ty(t)$, $v(t) = y(t)$ не обладает канонической формой Фробениуса [24, с. 73, теорема 3.4]. Вместе с тем ВС $\dot{x}_s(t) = x_s(t)$, $v_s(t) = x_s(t)$, для этой системы имеет вид канонической формы Фробениуса. Для t -семейства стационарных быстрых подсистем каноническая форма Фробениуса существует всегда при выполнении условия полной наблюдаемости (утверждение 4). Для приведенного здесь примера СП имеет вид $\frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = -ty_f(\tau)$, $v_f(\tau) = y_f(\tau)$ и является полностью наблюдаемой.

4.2. Алгоритм построения робастного μ -асимптотического ρ -экспоненциального наблюдателя ЛНСВС (5)

Из доказательства теоремы 1 (см. Приложение) вытекает следующий алгоритм.

1. Строим ВС (8) и проверяем выполнение условий (i) теоремы 1. Если они не выполнены ни для одной P_s , то ВС не является равномерно наблюдаемой и, значит, для нее не существует канонической формы Фробениуса. Заметим, что одна из матриц P_s , для которых выполняются условия утверждения 2, — это матрица P_s вида (18) из [5], которая строится по параметрам ВС (8).

2. Строим t -семейство быстрых подсистем (9) и проверяем выполнение условий (iii) теоремы 1.

3. Задаем желаемую величину скорости экспоненциального убывания ошибок наблюдения $\rho > 0$.

4. Вычисляем вектор коэффициентов усиления $k_s(t)$ ρ -экспоненциального наблюдателя для ВС (8) по формуле (18) (п. 3.3.1).

5. Вычисляем вектор коэффициентов усиления $k_f(t)$ $\mu^0 \rho$ -экспоненциального наблюдателя для t -семейства быстрых подсистем (9) по формуле (19) (п. 3.3.2).

6. Рассчитываем по формулам (21) коэффициенты $k_1(t)$, $k_2(t)$.

7. Проверяем выполнение условий (v) и (vi) теоремы 1.

8. Формируем композитный наблюдатель (22).

5. Редуцированные наблюдатели ЛНСВС

Состояние наблюдателя (22) приближается к $O(\mu)$ -аппроксимации состояния ЛНСВС (5) с экспоненциальной скоростью ρ , которую можно выбрать произвольно. Однако если значение малого параметра μ очень мало или неизвестно, то практически реализовать наблюдатель (22) затруднительно. В связи с этим целесообразно оценивать состояние исходной системы с помощью системы, не имеющей «быстрых» режимов наблюдателя (22).

Аналогично [16] введем два редуцированных наблюдателя ЛНСВС.

Согласно первому подходу для ВС (8) исходной ЛНСВС (5) строится асимптотический наблюдатель Люенбергера (14). В [16] для стационарных СВС доказано, что если матрицы ВС (8) и СП (9) гурвицевы и ВС наблюдаема, то асимптотический наблюдатель ВС является μ -асимптотическим наблюдателем исходной ЛНСВС. Следуя схеме доказательства теоремы 4 из [16] с использованием Теоремы 6.1. [33, с. 227], аналогичный результат можно доказать для ЛНСВС.

Теорема 2. Пусть выполнены условия утверждений 1, 5. Тогда существует $\mu^ > 0$ такое, что система*

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{w}_{sx}(t) &= (A_s(t) - k_s(t)c_s(t)) w_{sx}(t) + k_s(t)v(t), \\ w_{sy} &= -A_4^{-1}(t)A_3(t)w_{sx}(t), \quad t > t_0, \\ w_{sx} &\in \mathbb{R}^{n_1}, \quad w_{sy} \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad w_{sx}(0) = 0, \end{aligned}$$

является робастным μ -асимптотическим ρ -экспоненциальным наблюдателем семейства $\{A, c\}_{\mu^}$ ЛНСВС (5).*

Согласно второму подходу строится вырожденная система для наблюдателя (22), которая и принимается за наблюдатель исходной ЛНСВС (5).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует $\mu^ > 0$ такое, что система*

$$(24) \quad \begin{aligned} \dot{w}_{xs}(t) &= \left(\tilde{A}_1(t) - \tilde{A}_2(t)\tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t) \right) w_{xs}(t) + \left(k_1(t) - \tilde{A}_2(t)\tilde{A}_4^{-1}(t)k_2(t) \right) v(t), \\ w_{ys}(t) &= -\tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)w_{xs}(t) - \tilde{A}_4^{-1}(t)k_2(t)v(t), \quad t > t_0, \\ w_{xs} &\in \mathbb{R}^{n_1}, \quad w_{ys} \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad w_{xs}(0) = 0, \end{aligned}$$

является робастным μ -асимптотическим ρ -экспоненциальным наблюдателем семейства $\{A, c\}_{\mu^}$ ЛНСВС (5).*

6. Примеры

Рассмотрим численные примеры, иллюстрирующие применение предложенного метода построения робастных μ -асимптотических ρ -экспоненциальных наблюдателей ЛНСВС. Практическая реализация метода использует изложенный в разделе 4.2 (пп. 1–8) алгоритм построения робастного μ -асимптотического ρ -экспоненциального наблюдателя ЛНСВС (5) и схемы построения ρ -экспоненциальных наблюдателей для подсистем из разделов 3.3.1 и 3.3.2.

Пример 1. Рассмотрим ЛНСВС

$$(25) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\alpha(t) - 1)x_2(t) + (2 - \alpha(t))y(t), & \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t), \\ \mu \dot{y}(t) &= x_2(t) - y(t), & v(t) &= y(t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

матрицы которой имеют вид: $A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(t) - 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2(t) = \begin{pmatrix} 2 - \alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_3(t) = (0 \ 1)$, $A_4(t) = (-1)$, $c_1(t) = (0 \ 0)$, $c_2(t) = (1)$ и функция $\alpha(t)$ ограничена и непрерывно дифференцируема на T с ограниченной производной.

1. Вырожденная система для ЛНСВС (25):

$$(26) \quad \dot{x}_{s1}(t) = x_{s2}(t), \quad \dot{x}_{s2}(t) = -x_{s1}(t) - x_{s2}(t), \quad v_s(t) = x_{s2}(t),$$

где $A_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $c_s = (0, 1)$, стационарная и имеет невырожденную матрицу наблюдаемости $S_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, значит, для ВС (26) существует каноническая форма Фробениуса и согласно утверждению 3 выполнено условие (i) теоремы 1.

Преобразование (16) ВС (26) с помощью матрицы $G_s(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ приводит к канонической форме Фробениуса (A_s^0, c_s^0) , $A_s^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $c_s^0(t) = (0, 1)$, где $\alpha_s(t) = (-1, -1)'$.

2. t -семейство быстрых подсистем для ЛНСВС (25)

$$(27) \quad \frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{y}(\tau), \quad \tilde{v}_f(\tau) = \tilde{y}(\tau), \quad t \in T,$$

имеет матрицу наблюдаемости $S_f(t) = (1)$, $\text{rank } S_f(t) = 1, \forall t \in T$, значит, согласно утверждению 4 выполнено условие (iii) теоремы 1.

3. Зададим скорость экспоненциального убывания ошибок наблюдателя: $\rho = 2$.

4. Возьмем $\lambda_i = -3, i = 1, 2$, рассчитаем $\beta_s = (-9, -6)'$ и $k_s(t) = (-8, 5)'$.

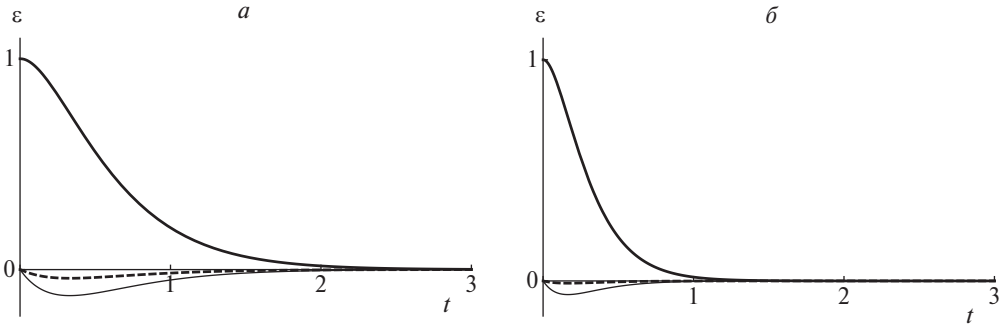


Рис. 1. Динамика ошибок композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (25).

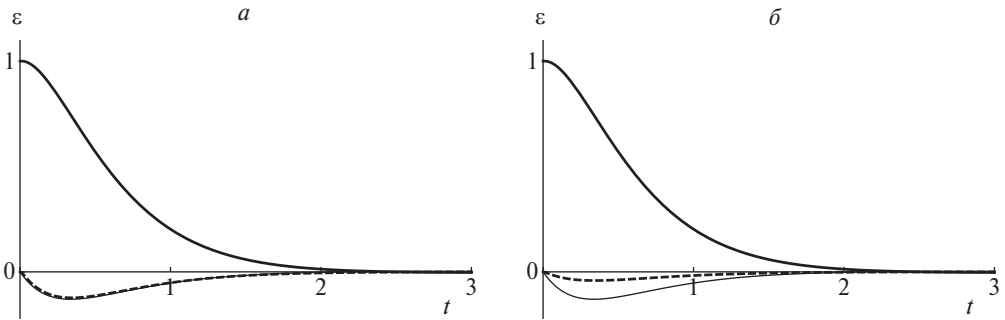


Рис. 2. Динамика ошибок редуцированных наблюдателей (29) и (30).

5. Семейство быстрых подсистем (27) уже имеет Фробениусову форму с $\alpha_f = (-1)$, поэтому $G_f(t) = 1$. Выберем $\lambda_f = -3$, тогда $\beta_f = (-3)$ и $k_f(t) = (2)$.

6. Рассчитаем коэффициенты (21): $k_1(t) = (2\alpha(t) - 28, 15)'$, $k_2 = (2)$.

7. Матричные функции (20) $\tilde{A}_1(t) = A_1(t)$, $\tilde{A}_2(t) = (-3\alpha(t) + 30, -15)'$, $\tilde{A}_3(t) = (0, 1)$, $\tilde{A}_4(t) = (-3)$ для ЛНСВС (25) удовлетворяют условиям (v), (vi) теоремы 1.

8. Окончательно робастный μ -асимптотический ρ -экспоненциальный композитный наблюдатель полного порядка (22) для ЛНСВС (25) при $\rho = 2$ примет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_{x1}(t) &= (\alpha(t) - 1)w_{x2}(t) - 3(\alpha(t) - 10)w_y(t) + 2(\alpha(t) - 14)v(t), \\
 \dot{w}_{x2}(t) &= -w_{x1}(t) - w_{x2}(t) - 15w_y(t) + 15v(t), \\
 \mu\dot{w}_y(t) &= w_{x2}(t) - 3w_y(t) + 2v(t).
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

На рис. 1, 2 и в табл. 1 продемонстрированы результаты численных экспериментов с моделью (25) с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $y(0) = 0$, при $\alpha(t) = \sin(t)$, которые выполнены средствами Wolfram Mathematica.

Таблица 1. Интегральная норма ошибок наблюдателя (28),
 $\alpha(t) = \sin(t)$

	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,01$
$\ \varepsilon_{x1}\ _1$	0,6755937	0,668459	0,666458
$\ \varepsilon_{x2}\ _1$	0,112656	0,111410	0,111141
$\ \varepsilon_y\ _1$	0,037552	0,0371366	0,030469

На рис. 1 изображена динамика ошибок ε_{x1} (толстая), ε_{x2} (тонкая), ε_y (пунктир) композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (25) при $\mu = 0,01$. Рисунок 1,а соответствует выбору $\lambda_i = -3$, рис. 1,б соответствует $\lambda_i = -6$ и демонстрирует изменение динамики ошибок наблюдателя при увеличении показателя экспоненциального убывания.

Для сравнения качества оценивания при различных значениях малого параметра, рассчитаем интегральную норму ошибок наблюдателя (28) на интервале $[0, 30]$ (табл. 1).

Сравнение оценок ошибок из табл. 1 подтверждает, что при уменьшении значения μ уменьшается ошибка оценивания.

Редуцированный наблюдатель (23) для ЛНСВС (25) имеет вид

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{w}_{sx1}(t) &= 9w_{sx2}(t) - 8v(t), \\ \dot{w}_{sx2}(t) &= -w_{sx1}(t) - 6w_{sx2}(t) + 5v(t), \\ w_{sy} &= w_{sx2}(t), \quad w_{sx1}(0) = 0, \quad w_{sx2}(0) = 0. \end{aligned}$$

Редуцированный наблюдатель (24) для ЛНСВС (25) имеет вид

$$(30) \quad \begin{aligned} \dot{w}_{xs1}(t) &= 9w_{xs2}(t) - 8v(t), \quad w_{xs1}(0) = 0, \\ \dot{w}_{xs2}(t) &= -w_{xs1}(t) - 6w_{xs2}(t) + 5v(t), \quad w_{xs2}(0) = 0, \\ w_{ys}(t) &= \frac{1}{3}w_{xs2}(t) + \frac{2}{3}v(t). \end{aligned}$$

Динамика ошибок ε_{x1} (толстая), ε_{x2} (тонкая), ε_y (пунктир) редуцированных наблюдателей (29) и (30) для ЛНСВС (25) при $\alpha(t) = \sin(t)$, $\mu = 0,01$, $\lambda_i = -3$ представлена на рис. 2: 2,а для наблюдателя (29) и 2,б для наблюдателя (30).

Пример 2. Рассмотрим ЛНСВС

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left(\varphi(t) - \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} - \delta(t) \right) x_1(t) + \zeta(t)x_2(t) + \delta(t)y(t), \\ \dot{x}_2(t) &= (\gamma(t) - \alpha(t))x_1(t) + \xi(t)x_2(t) + \alpha(t)y(t), \\ \mu\dot{y}(t) &= x_1(t) - y(t), \\ v(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + y(t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

где $\varphi(t) = \sin(t) + 1$, $\gamma(t) = \sin(t) + 2$, $\delta(t) = \sin(t) + 1 - \frac{\cos(t)}{\sin(t)+2}$, $\xi = -\sin(t) - 1$, $\zeta = \cos(t)$, $\alpha(t)$ не является дважды непрерывно дифференцируемой хотя бы в одной точке $t \in T$.

Система (31) в виде (1)–(2) имеет параметры $n_1 = 2$, $n_2 = m = 1$ и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varphi(t) - \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} - \delta(t) & \zeta(t) \\ \gamma(t) - \alpha(t) & \xi(t) \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix},$$

$$A_3 = (1 \ 0), \quad A_4 = (-1), \quad C_1 = (-1 \ 1), \quad C_2 = (1).$$

Для ЛНСВС (31) матричная функция $A(t, \mu)$ (4) не является дважды непрерывно дифференцируемой и для такой системы не существует классической матрицы наблюдаемости. Поэтому построение наблюдателя по схеме [5] непосредственно для ЛНСВС (31) невозможно. Однако, как показано ниже, для системы (31) можно построить наблюдатель (22).

1. ВС (8) для ЛНСВС (31)

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= \left(\varphi(t) - \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} \right) \bar{x}_1(t) + \zeta(t) \bar{x}_2(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) &= \gamma(t) \bar{x}_1(t) + \xi(t) \bar{x}_2(t), \\ \bar{v}_s(t) &= \bar{x}_2(t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

имеет класс $\{E_2, 2\}$. Для ВС (32) определена классическая матрица наблюдаемости: $S_{E_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & \xi \end{pmatrix}$. Так как $\text{rank } S_{E_2}(t) = 2 = n_1, \forall t \in T$, то согласно утверждению 3 ВС (32) равномерно наблюдаема и выполнено условие (i) теоремы 1.

2. t -семейство быстрых подсистем для ЛНСВС (31) совпадает с (27), значит, выполнено условие (iii) теоремы 1.

3. Зададим скорость экспоненциального убывания ошибок наблюдателя: $\rho = 2$.

4. Выберем $\lambda_i = -3$, рассчитаем $\beta_s = (-9, -6)'$.

5. Преобразование (16) ВС (32) с помощью матрицы $G_s(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{\xi}{\gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ приводит к канонической форме Фробениуса (17) с $\alpha_s(t) = (-\dot{\varphi} - \xi\varphi + \zeta\gamma, \varphi + \xi)'$.

Рассчитанные векторы коэффициентов усиления для подсистем:

$$k_s(t) = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} \left(9 + 6\varphi + \varphi^2 - \dot{\varphi} \right) + \zeta \\ 6 + \xi + \varphi \end{pmatrix}, \quad k_f = (2).$$

6. По (21) имеем: $k_1(t) = \begin{pmatrix} -2\delta + 3\zeta + 3\gamma^{-1} \left((\varphi + 3)^2 - \dot{\varphi} \right) \\ -2\alpha + 3(6 + \xi + \varphi) \end{pmatrix}, \quad k_2(t) = (2).$

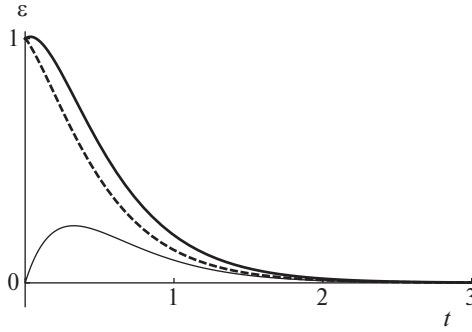


Рис. 3. Динамика ошибок композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (31).

7. Матричные функции (20)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(t) &= \\ &= \begin{pmatrix} 3(\zeta - \delta) + \varphi + \gamma^{-1}(3(\varphi + 3)^2 - \dot{\gamma} - 3\dot{\varphi}) & 2(\delta - \zeta) - 3\gamma^{-1}((\varphi + 3)^2 - \dot{\varphi}) \\ -3\alpha + \gamma + 3(6 + \xi + \varphi) & 2\alpha + \xi - 3(6 + \xi + \varphi) \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_2(t) &= \begin{pmatrix} 3\delta - 3\zeta - 3\gamma^{-1}((\varphi + 3)^2 - \dot{\varphi}) \\ 3\alpha - 3(6 + \xi + \varphi) \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_4(t) &= \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для ЛНСВС (31) удовлетворяют условиям (v), (vi) теоремы 1.

8. Согласно теореме 1 робастный μ -асимптотический ρ -экспоненциальный композитный наблюдатель полного порядка для ЛНСВС (31) с параметрами из п. 6 при $\rho = 2$ имеет вид (22) с рассчитанными в п. 6 коэффициентами $k_1(t)$, $k_2(t)$.

На рис. 3 изображена динамика ошибок ε_{x1} (толстая), ε_{x2} (тонкая), ε_y (пунктир) композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (31) с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $y(0) = 1$ при $\mu = 0,01$.

7. Заключение

Предложенный метод синтеза наблюдателей состояний ЛНСВС позволяет разбить задачу на решение независимых подзадач синтеза наблюдателей для систем меньшей размерности, часть из которых является стационарными, обеспечить робастность наблюдателей по малому параметру и существенно ослабить известные требования на гладкость коэффициентов. Вектор коэффициентов усиления композитного наблюдателя выражен через коэффициенты усиления не зависящих от малого параметра подсистем, соответствующих разделению временных масштабов. Ошибка оценивания состояния с произвольным наперед заданным показателем экспоненциального убывания сходится к бесконечно малой величине того же порядка малости, что и малый параметр.

Теорема 1 дает достаточные условия существования робастного μ -асимптотического ρ -экспоненциального наблюдателя ЛНСВС. Построены μ -асимптотические композитные наблюдатели (22) полного и (23), (24) редуцированного порядков. Приведен конструктивный алгоритм расчета вектора коэффициентов усиления (18), (19), (21) композитного наблюдателя, даны иллюстративные примеры.

При построении робастного μ -асимптотического ρ -экспоненциального наблюдателя ЛНСВС ρ выбирается так, чтобы обеспечить желаемую скорость сходимости ошибок наблюдения в $O(\mu)$ -окрестность нуля.

Заметим, что при построении μ -асимптотического ρ -экспоненциального наблюдателя ЛНСВС не требуется существования канонической формы Фробениуса и квазидифференцируемости выходных функций исходной ЛНСВС.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании систем управления, идентификации и диагностики динамических систем, описываемых линейными нестационарными сингулярно возмущенными системами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Из (i) следует, что ВС (A_s, c_s) (8) равномерно наблюдаема и для нее существует ρ -экспоненциальный наблюдатель. При выполнении предположения (iii) существует $\mu^0 \rho$ -экспоненциальный наблюдатель для t -семейства быстрых подсистем (9).

Будем искать наблюдатель полного порядка для ЛНСВС (5) в виде динамической системы (7). Вектор коэффициентов усиления $K(t, \mu)$ будем искать в виде

$$K(t, \mu) = \text{diag} \left\{ E_{n_1}, \frac{1}{\mu} E_{n_2} \right\} \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}, \quad k_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad k_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2},$$

где $k_1(t), k_2(t)$ пока не определены. Тогда наблюдатель (7) примет вид (22), а уравнения динамики ошибок $\varepsilon_x(t, \mu) = x(t, \mu) - w_x(t, \mu)$, $\varepsilon_y(t, \mu) = y(t, \mu) - w_y(t, \mu)$ для наблюдателя (22) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x(t) &= \tilde{A}_1(t)\varepsilon_x(t) + \tilde{A}_2(t)\varepsilon_y(t), \quad \varepsilon_x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{\varepsilon}_y(t) &= \tilde{A}_3(t)\varepsilon_x(t) + \tilde{A}_4(t)\varepsilon_y(t), \quad \varepsilon_y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t > t_0. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Поскольку система динамики ошибок наблюдения (П.1) имеет вид ЛНСВС (1)–(2), то при выполнении предположений теоремы (v), (vi) для системы ошибок (П.1) выполнены условия теоремы 3.1 из [33, с. 212] и, значит, существует расщепляющее Ляпуновское преобразование вида (3.4) из [33, с. 210] с непрерывно дифференцируемыми ограниченными на T матрицами $\tilde{L}(t, \mu)$, $\tilde{H}(t, \mu)$, которые удовлетворяют следующей системе (чтобы не загромождать

запись, зависимость функций от аргумента t в некоторых местах будем опускать):

$$(II.2) \quad \tilde{A}_3 - \tilde{A}_4 \tilde{L}(\mu) + \mu \tilde{L}(\mu) \left(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 \tilde{L}(\mu) \right) = \mu \dot{\tilde{L}}(\mu),$$

$$(II.3) \quad \mu \left[\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 \tilde{L}(\mu) \right] \tilde{H}(\mu) - \tilde{H}(\mu) \left[\tilde{A}_4 + \mu \tilde{L}(\mu) \tilde{A}_2 \right] + \tilde{A}_2 = \mu \dot{\tilde{H}}(\mu).$$

Из (II.2), (II.3) с учетом (i), (vi) имеем аппроксимацию:

$$(II.4) \quad \begin{aligned} \tilde{L}(t, \mu) &= A_4^{-1}(t) k_2(t) c_2(t) \tilde{L}(t, \mu) \tilde{A}_3(t) + O(\mu), \\ \tilde{L}(t, \mu) &= \tilde{A}_4^{-1}(t) \tilde{A}_3(t) + O(\mu), \\ \tilde{H}(t, \mu) &= \left(\tilde{H}(t, \mu) k_2(t) c_2(t) + \tilde{A}_2(t) \right) A_4^{-1}(t) + O(\mu), \\ \tilde{H}(t, \mu) &= \tilde{A}_2(t) \tilde{A}_4^{-1}(t) + O(\mu). \end{aligned}$$

В результате расщепляющего преобразования система динамики ошибок (II.1) примет вид разделенной по временным шкалам системы:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\xi(t) &= A_\xi(t, \mu) \varepsilon_\xi(t), \quad \varepsilon_\xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{\varepsilon}_\eta(t) &= A_\eta(t, \mu) \varepsilon_\eta(t), \quad \varepsilon_\eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t > t_0, \end{aligned}$$

где

$$(II.6) \quad A_\xi(t, \mu) = \tilde{A}_1(t) - \tilde{A}_2(t) \tilde{L}(t, \mu), \quad A_\eta(t, \mu) = \tilde{A}_4(t) + \mu \tilde{L}(t, \mu) \tilde{A}_2(t).$$

При этом согласно утверждению 1 для решений (II.1) и (II.5) справедливы равенства:

$$(II.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\xi(t) &= \varepsilon_x(t) + O(\mu), \quad \varepsilon_x(t) = \varepsilon_\xi(t) + O(\mu), \\ \varepsilon_\eta(t) &= \tilde{A}_4^{-1}(t) \tilde{A}_3(t) \varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t) + O(\mu), \\ \varepsilon_y(t) &= -\tilde{A}_4^{-1}(t) \tilde{A}_3(t) \varepsilon_\xi(t) + \varepsilon_\eta(t) + O(\mu). \end{aligned}$$

Положим

$$(II.8) \quad k_2(t) = k_f(t)$$

и будем искать $k_1(t)$ в виде

$$(II.9) \quad k_1(t) = k_s(t) + \tilde{H}^0(t) k_2(t), \quad \tilde{H}^0(t) = (A_2(t) - k_s(t) c_2(t)) A_4^{-1}(t).$$

Подставим (II.9), (II.8) в (II.6) и выполним последовательно преобразования:

$$\begin{aligned} A_\xi(\mu) &\stackrel{(II.9)}{=} A_1 - \left(k_s + \tilde{H}^0 k_2 \right) c_1 - \left(A_2 - \left(k_s + \tilde{H}^0 k_2 \right) c_2 \right) \tilde{L}(\mu) = \\ &= \left(A_1 - A_2 \tilde{L}(\mu) \right) - \left(k_s + \tilde{H}^0 k_2 \right) \left(c_1 - c_2 \tilde{L}(\mu) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(\text{П.4})}{=} A_1 - A_2 A_4^{-1} \left(k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) + A_3 - k_2 c_1 \right) - \\
& - \left(k_s + \tilde{H}^0 k_2 \right) \left[c_1 - c_2 A_4^{-1} \left(k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) + A_3 - k_2 c_1 \right) \right] + O(\mu) = \\
& \stackrel{(A_s, c_s)}{=} A_s - k_s c_s + \left(-A_2 + k_s c_2 + \tilde{H}^0 k_2 c_2 \right) A_4^{-1} k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) + \\
& + \left(A_2 - k_s c_2 - \tilde{H}^0 A_4 \right) A_4^{-1} k_2 c_1 + \tilde{H}^0 k_2 c_2 A_4^{-1} (A_3 - k_2 c_1) + O(\mu) = \\
& \stackrel{(\text{П.9})}{=} A_s - k_s c_s + \tilde{H}^0 k_2 c_2 A_4^{-1} \left(A_4 \tilde{L}(\mu) + k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) - k_2 c_1 + A_3 \right) + O(\mu) = \\
& \stackrel{(\text{П.4})}{=} A_s - k_s c_s + O(\mu).
\end{aligned}$$

Таким образом, для $A_\xi(t, \mu)$ при $k_1(t), k_2(t)$ вида (П.9), (П.8) справедлива аппроксимация:

$$(П.10) \quad A_\xi(t, \mu) = A_s(t) - k_s(t) c_s(t) + O(\mu).$$

Далее, из (П.6) следует

$$(П.11) \quad A_\eta(t, \mu) = (A_4(t) - k_2(t) c_2(t)) + O(\mu).$$

Таким образом, объединяя (П.10) и (П.11), из (П.5) получаем:

$$(П.12) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\xi(t) &= (A_s(t) - k_s(t) c_s(t) + O(\mu)) \varepsilon_\xi(t), \\ \mu \dot{\varepsilon}_\eta(t) &= (A_4(t) - k_2(t) c_2(t) + O(\mu)) \varepsilon_\eta(t), \quad t > t_0. \end{aligned}$$

Поскольку в (П.12) $k_s(t), k_2(t)$ – это коэффициенты усиления для наблюдателя (14) ВС (8) и наблюдателя (15) семейства СП (9), то параметры системы ошибок (П.12) $O(\mu)$ – близки к параметрам системы динамики ошибок для наблюдателей ВС и t -семейства быстрых подсистем с векторами коэффициентов усиления k_s и k_f соответственно. Поэтому в силу непрерывной зависимости решения (П.12) от аддитивных возмущений коэффициентов системы справедливы оценки $\|\varepsilon_\xi(t)\| \leq c_{\rho_s} \exp(-\rho(t - \bar{t})) + O(\mu)$, $t \geq \bar{t}$, $\|\varepsilon_\eta(t)\| \leq c_{\rho_f} \exp\left(-\mu^0 \rho \frac{(t - \bar{t})}{\mu}\right) + O(\mu)$, $t \geq \bar{t}$, откуда с учетом (П.7) вытекает справедливость оценок

$$\|\varepsilon_x(t)\| \leq c_{\rho_s} \exp(-\rho(t - \bar{t})) + O(\mu), \quad t \geq \bar{t},$$

$$\|\varepsilon_y(t)\| \leq c_{\rho_s} \|\tilde{A}_4^{-1}(t) \tilde{A}_3(t)\| \exp(-\rho(t - \bar{t})) + c_{\rho_f} \exp\left(-\mu^0 \rho \left(\frac{t - \bar{t}}{\mu}\right)\right) + O(\mu),$$

$$t \geq \bar{t}.$$

Пусть $c_\rho = \max\{c_{\rho_s}, c_{\rho_f}, c_{\rho_s} \|\tilde{A}_4^{-1}(t) \tilde{A}_3(t)\|\}$. При $\mu \in (0, \mu^0]$ имеет место оценка $\exp\left(-\mu^0 \rho \left(\frac{t - \bar{t}}{\mu}\right)\right) < \exp(-\rho(t - \bar{t}))$, $t \geq \bar{t}$, откуда следует справедливость оценок $\|\varepsilon(t, \mu)\| \leq c_\rho \exp(-\rho(t - \bar{t})) + O(\mu)$, $t \geq \bar{t}$, и согласно определению 7 и из совпадения (П.9) и (21) – справедливость теоремы 1.

Благодарю профессора Астровского А.И. за ценные советы и указания, высказанные в процессе обсуждения материала этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
2. *O'Reilly J.* Observers for linear systems. London: Academic Press, 1983.
3. *Краснова С.А., Уткин В.А., Михеев Ю.В.* Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // *АиТ.* 2001. № 2. С. 43–64.
4. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
5. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Оценка состояний линейных нестационарных систем наблюдения // *Дифференц. уравнения.* 2019. Т. 55. № 3. С. 370–379. <https://doi.org/10.1134/S0374064119030117>
6. *Куюк Д.В., Бобцов А.А.* Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // *АиТ.* 2020. № 12. С. 100–110. <https://doi.org/10.31857/S0005231020120065>
7. *Luenberger D.G.* Observing the state of a linear system // *IEEE Transactions on Military Electronics.* 1964. Vol. 8. No. 2. P. 74–80. <https://doi.org/10.1109/TМЕ.1964.4323124>
8. *Luenberger D.G.* An introduction to observers // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1971. Vol. Ac-16. P. 596–602. <https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099826>
9. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // *Итоги науки и техники ВИНТИ. Мат. анализ.* 1982. Т. 20. С. 3–77. <https://doi.org/10.1007/BF01262406>
10. *Naidu D.S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms.* 2002. No. 9. P. 233–278.
11. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // *АиТ.* 2006. № 1. С. 3–51. <https://doi.org/10.1134/S0005117906010012>
12. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview 2002–1012 // *Int. J. Inform. Syst. Sci.* 2014. No. 9. P. 1–36.
13. *Курина Г.А., Калашникова М.А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // *АиТ.* 2022. № 11. С. 3–61. <https://doi.org/10.31857/S0005231022110010>
14. *O'Reilly J.* Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems // *Int. J. Control.* 1979. V. 30. No. 5. P. 745–756.
15. *Yousfi B., Raissi T., Amairi M., Aoun M.* Interval observers design for singularly perturbed systems // *53rd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, USA.* 2014. P. 1637–1642. <https://doi.org/10.1109/CDC.2014.7039634>
16. *Locatelli A.* State observation and output feedback stabilization of linear singularly perturbable systems // *IFAC Proceedings Volumes.* 1976. V. 9. Is. 3. P. 335–343. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)67356-7](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)67356-7)
17. *Porter B.* Singular perturbation methods in the design of full-order observers for multivariable linear systems // *Int. J. Control.* 1977. V. 26. No. 4. P. 589–594. <https://doi.org/10.1080/00207177708922332>

18. *Yoo H., Gajic Z.* New designs of reduced-order observer-based controllers for singularly perturbed linear systems // *Math. Probl. Eng.* 2017. V. 2017. P. 1–14. <https://doi.org/10.1155/2017/2859548>
19. *Duan Z., Kravaris C.* Reduced-order Nonlinear Observer Design for Two-time-scale Systems // *IFAC-PapersOnLine*. V. 53. Is. 2. 2020. P. 5922–5927. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1643>
20. *Deghat M., Nesic D., Teel A.R., Manzie C.* Observing the Slow States of General Singularly Perturbed Systems // 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Jeju, Korea (South). 2020. P. 4206–4211. <https://doi.org/10.1109/CDC42340.2020.9304464>
21. *Cuevas L., Nesic D., Manzie C.* Robustness analysis of nonlinear observers for the slow variables of singularly perturbed systems // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2020. V. 30. No. 14. P. 5628–5656. <https://doi.org/10.1002/rnc.5100>
22. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
23. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 5. С. 523–526.
24. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск: «Беларус. навука», 2013.
25. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* К теории наблюдаемости линейных сингулярно возмущенных систем // *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* 1999. № 3. С. 22–27.
26. *Цехан О.Б.* Условия полной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем второго порядка с запаздыванием // *Весн. ГрДУ імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2014. № 1 (170). С. 53–64.
27. *Цехан О.Б.* Условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2021. Т. 29. № 1–2. С. 138–148.
28. *Tsekhan O., Pawluszewicz E.* Observability of singularly perturbed linear time-varying systems on time scales // 26th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). 2022. P. 116–121. <https://doi.org/10.1109/MMAR55195.2022.9874295>
29. *Цехан О.Б.* Робастные достаточные условия равномерной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы // *Дифференциальные уравнения и математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНТИ РАН, М.* 2023. Т. 226. С. 150–164. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-226-150-164>
30. *Tsekhan O.* Robust sufficient conditions for the observability of a linear time-invariant singularly perturbed system with delay // *Commun. Optim. Theory.* 2023. P. 1–10. <https://doi.org/10.23952/cot.2023.24>
31. *Цехан О.Б.* Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем // *Дифференц. уравнения.* 2023. Т. 59. № 8. С. 1123–1138. <https://doi.org/10.31857/S0374064123080113>

32. *Wolovich W.A.* On state estimation of observable systems // Preprint NASA Electronics Research Center. Cambridge. 1968. No. 6. P. 210–220.
<https://doi.org/10.1109/JACC.1968.4169084>
33. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular perturbations methods in control: analysis and design. NY. Academic Press, 1999.
34. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
35. *Астровский А.И.* Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Минск: МИУ, 2007.
36. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1999.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 28.11.2023

После доработки 28.02.2024

Принята к публикации 04.03.2024

© 2024 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com),
Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ВИДЕ ВЛОЖЕННЫХ САТУРАТОРОВ

Исследуется устойчивость системы с переключениями, возникающей при применении обратной связи в виде вложенных сатураторов для стабилизации интегратора 2-го порядка. Использование обратной связи в виде вложенных сатураторов позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение фазового ограничения на скорость приближения к положению равновесия, что особенно важно при больших начальных отклонениях. Построена функция Ляпунова замкнутой системы, с помощью которой доказана ее глобальная асимптотическая устойчивость при любых положительных коэффициентах обратной связи.

Ключевые слова: стабилизация цепочки двух интеграторов, система с переключениями, глобальная асимптотическая устойчивость, вложенные сатураторы, функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231024040032, EDN: ZGUVAJ

1. Введение

Одна из актуальных проблем теории управления – стабилизация цепочек интеграторов. Интерес к данной проблематике обусловлен тем, что во многих приложениях исходные модели, например модели механических планарных систем, заданы в виде цепочек интеграторов; более того, управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на другие классы систем. Широкое распространение в последние десятилетия получил подход, основанный на применении специальных обратных связей в виде вложенных негладких функций насыщения – сатураторов. Настоящая работа является продолжением опубликованного в [1] исследования устойчивости интегратора 2-го порядка с обратной связью в виде вложенных сатураторов.

Интерес к обратной связи в виде вложенных сатураторов объясняется рядом замечательных свойств полученной замкнутой системы. Преимущества таких обратных связей, а также актуальность задачи стабилизации цепочек интеграторов обсуждаются во многих публикациях, например в [1–8]. Применение обратной связи в виде вложенных сатураторов, однако, приводит к достаточно сложной нелинейной системе с переключениями, анализ устойчивости которой представляет нетривиальную задачу. Доказать глобальную

устойчивость удается преимущественно для систем 2-го порядка [1, 2, 5] и для обратных связей определенного вида. Так, например, основанное на построении функции Ляпунова доказательство устойчивости системы 2-го порядка в [2] неприменимо к рассмотренной в [1] системе с обратным порядком вложенности сатураторов (см. более подробно [1]). Общий случай n -мерного интегратора обсуждается в [3, 4]. Однако глобальная устойчивость системы, замкнутой обратной связью в виде n вложенных сатураторов, была доказана только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным, на практике редко выполнимым условиям [3, Theorem 2.1],

В [1] доказана глобальная асимптотическая устойчивость интегратора 2-го порядка с обратной связью в виде вложенных сатураторов для одного частного случая, когда коэффициенты обратной связи выбираются из однопараметрического семейства. Цель настоящей работы – представить более простое, основанное на построении функции Ляпунова доказательство глобальной асимптотической устойчивости, справедливое и в общем случае произвольного выбора коэффициентов.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации интегратора 2-го порядка

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U(x), \quad x \equiv [x_1, x_2]^T,$$

с помощью непрерывной ограниченной обратной связи в виде вложенных сатураторов:

$$(2) \quad U(x) = -\text{sat}_{k_4}(k_3(x_2 + \text{sat}_{k_2}(k_1 x_1))),$$

где $\text{sat}_d(\cdot)$, $d = \{k_2, k_4\}$ – негладкая функция насыщения, $\text{sat}_d(w) = w$, когда $|w| \leq d$, и $\text{sat}_d(w) = d \text{sign}(w)$ при $|w| > d$; k_4 – ресурс управления и k_2 – ограничение на максимальную скорость приближения к равновесию. Правая часть (2) задает разбиение фазовой плоскости на множества D_1 , D_2 и D_3 (рис. 1). Область D_1 включает все точки, в которых оба сатуратора ненасыщены (наклонная полоса, ограниченная пунктирными линиями на рис. 1); множество $D_2 = D_2^- \cup D_2^+$ – точки, в которых насыщен только внутренний сатуратор; $D_3 = D_3^- \cup D_3^+$ – все точки, в которых насыщен внешний сатуратор (более подробно см. [1, 7]). Из формулы (2) видно, что $U(x)$ – кусочно-линейная функция, а замкнутая система (1), (2) представляет собой систему с переключениями, состоящую из пяти линейных систем, переключения между которыми зависят от состояния и происходят при пересечении границ между областями.

Исходная, зависящая от четырех параметров задача, сводится к исследованию двухпараметрической задачи, если перейти к безразмерным переменным $\tilde{x}_1 = k_4 x_1 / k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2 / k_2$ и времени $\tilde{t} = k_4 t / k_2$ [1]. В безразмерной модели два

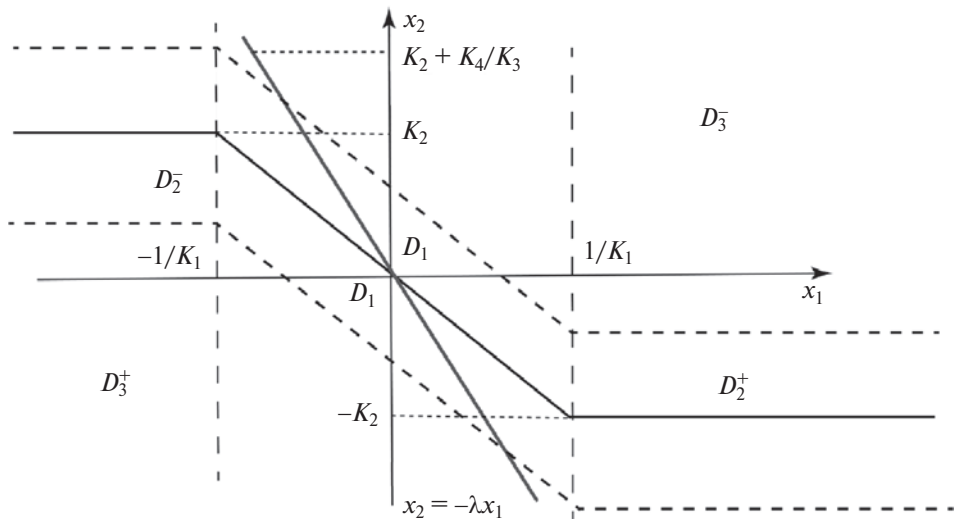


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости на множества D_1 , D_2 и D_3 .

коэффициента обращаются в единицу, $\tilde{k}_4 = \tilde{k}_2 = 1$, а два других определены формулами $\tilde{k}_1 = k_1 k_2^2 / k_4$ и $\tilde{k}_3 = k_2 k_3 / k_4$. Всюду далее будем полагать все переменные и константы безразмерными и использовать для них прежнее обозначение (без тильды). В безразмерной модели обратная связь (2) принимает вид [1]:

$$(3) \quad U(x_1, x_2) = -\text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))),$$

где обозначение $\text{sat}(\cdot)$ без нижнего индекса используется для функции насыщения с единичным пределом: $\text{sat}(\cdot) \equiv \text{sat}_1(\cdot)$.

Отметим, что обратная связь (3) обеспечивает выполнение фазового ограничения $|x_2(t)| \leq 1$ при любом начальном удалении $x_1(0)$, коль скоро $|x_2(0)| \leq 1$ [7]; т.е. множество $\Pi = \{x : |x_2| \leq 1\}$ является инвариантной областью системы (1), (3). Кроме того, соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 легко обеспечить желаемый тип положения равновесия (узел или фокус) и любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения в окрестности точки равновесия [1, 7].

Нетрудно показать также, что и при любых начальных условиях начиная с некоторого момента времени указанное фазовое ограничение также выполняется. Действительно, рассмотрим функцию $v(x) = x_2^2$, положительно определенную при всех $x_2 \neq 0$, и продифференцируем ее в силу системы (1), (3): $\dot{v}(x) = -2x_2 \text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)))$. Функция $\dot{v}(x)$ определено отрицательна в области $|x_2| > 1$; т.е. множество $|x_2| \leq 1$ является притягивающим для решений системы (1), (3). Отсюда с учетом того, что никакая целая траектория не может принадлежать множеству $|x_2| = 1$, следует, что траектория системы за конечное время обязательно попадет в инвариантную область $|x_2| \leq 1$.

В [1] доказана глобальная асимптотическая устойчивость системы (1), (3) в частном случае выбора коэффициентов k_1 и k_3 из однопараметрического семейства:

$$(4) \quad k_1 = \lambda/2, \quad k_3 = 2\lambda, \quad \lambda > 0,$$

где λ – экспоненциальная скорость убывания отклонения в окрестности нуля. Доказательство несложно, но достаточно громоздко и существенно опирается на тот факт, что коэффициенты k_1 и k_3 связаны соотношениями (4), и поэтому не может быть обобщено на случай независимого выбора коэффициентов.

Представленное ниже доказательство глобальной асимптотической устойчивости основано на построении функции Ляпунова системы (1), (3) и справедливо для любых положительных коэффициентах обратной связи.

3. Доказательство глобальной асимптотической устойчивости

Теорема 1. Система (1), (3) глобально асимптотически устойчива при любых положительных коэффициентах.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$(5) \quad V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 s)) ds$$

и докажем, что она является функцией Ляпунова системы (1), (3). Из определения функции насыщения следуют неравенства $\text{sat}(s)s > 0$ и $\text{sat}(f(s))s > 0$, $\forall s \neq 0$, где $f(s)$ – любая монотонно неубывающая непрерывная функция такая, что $f(0) = 0$. Отсюда с учетом монотонности функции $\text{sat}(s)$ следует положительность интегрального члена в (5), а значит, и функции $V(x)$ во всем R^2 . Очевидно также, что $V(x)$ стремится к бесконечности при $\|x\| \rightarrow \infty$. Дифференцируя $V(x)$ в силу системы (1), (3), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -x_2 \text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))) + \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 x_1))x_2 = \\ &= -[\text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))) - \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 x_1))]x_2. \end{aligned}$$

Так как сатуратор – монотонно неубывающая функция, справедливо неравенство $[\text{sat}(s + s_0) - \text{sat}(s_0)]s \geq 0 \quad \forall s \neq 0, \forall s_0$, откуда следует знакоотрицательность производной: $\dot{V}(x) \leq 0$.

При $k_3 < 1$ выражение в квадратных скобках, а с ним и производная, обращается в ноль только на множестве $x_2 = 0$, которое не содержит ни одной целой траектории, кроме $x = 0$. Если $k_3 \geq 1$, производная дополнительно обращается в ноль на подмножествах областей D_3^+ и D_3^- , в которых оба слагаемых в квадратных скобках одновременно равны $+1$ и -1 соответственно. Легко видеть, что указанные множества также не могут содержать целых

траекторий. Действительно, траекториями системы в D_3^- и D_3^+ являются параболы

$$x_1 = \mp \frac{1}{2}x_2^2 + C.$$

Так как ни одна из парабол не может целиком лежать в D_3^- или D_3^+ (см. рис. 1) и при этом движение происходит с постоянным ускорением, система через конечное время неизбежно попадает либо в D_1 , либо в D_2 .

Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина–Красовского [9] и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (1), (3) в целом. Теорема доказана.

4. Численная иллюстрация

В качестве иллюстрации были построены линии уровня функции Ляпунова (5) для системы (1), (3) с коэффициентами $k_1 = 1$ и $k_3 = 3$. На рис. 2 показана одна из линий уровня (сплошная линия) и несколько фазовых траекторий (пунктирные линии), начинающихся на ней. Начальные точки траекторий помечены кружочками. Как видно из рисунка, ни одна из траекторий не выходит за пределы инвариантного множества, ограниченного линией уровня. Сегменты траекторий, идущие вдоль границы множества, лежат в подмножествах D_3^- и D_3^+ , в которых производная функции Ляпунова в силу системы равна нулю. После пересечения границы с областью D_1 или D_2 производная становится отрицательной и траектория уходит внутрь инвариантной области. Другие численные примеры, иллюстрирующие эффективность обратной связи в виде вложенных сатураторов, приведены в [6, 7].

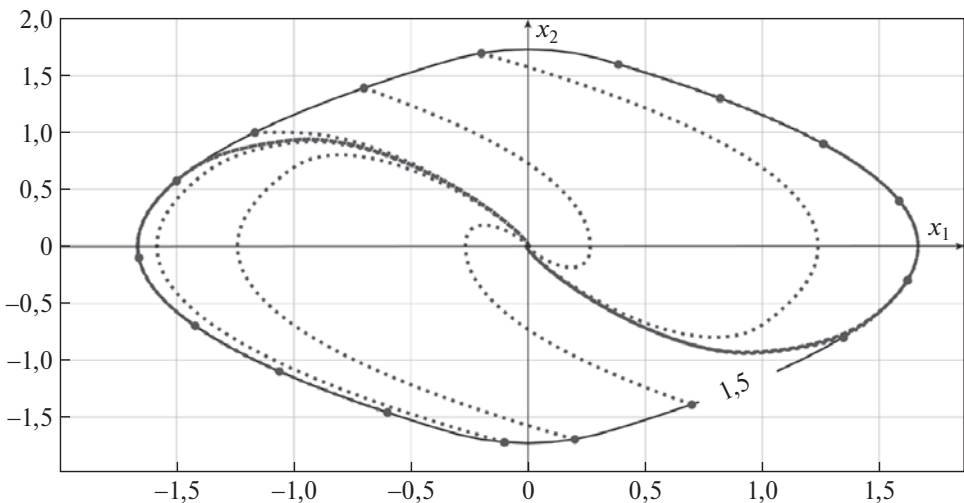


Рис. 2. Линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории.

5. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации цепочки двух интеграторов обратной связью в виде двух вложенных сатураторов. С помощью перехода к безразмерным переменным исходная, зависящая от четырех коэффициентов обратной связи задача сводится к исследованию двухпараметрической системы. Обсуждаются преимущества обратной связи в виде вложенных сатураторов. Главный результат работы – построение функции Ляпунова, с помощью которой доказана глобальная устойчивость замкнутой системы при любых положительных коэффициентах обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость аффинной системы второго порядка с переключениями // *АиТ.* 2023. № 9. С. 95–105.
Pesterev A. V. Global Stability of a Second-Order Affine Switching System // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 9. pp. 1085–1093.
2. *Hua M.-D., Samson C.* Time sub-optimal nonlinear pi and pid controllers applied to longitudinal headway car control // *Int. J. Control.* 2011. V. 84. P. 1717–1728.
3. *Teel A.R.* Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // *Sys. & Cont. Lett.* 1992. V. 18. No. 3. P. 165–171.
4. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // *Trans. Autom. Contr. IEEE,* 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
5. *Olfati-Saber R.* Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles // Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
6. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // *Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS).* 2020. V. 1340. P. 236–249.
7. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Optimizing coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // *Lect. Notes Comput. Sci.* V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. P. 191–202.
8. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // *Lect. Notes Comput. Sci.* V. 13781 Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 66–78.
9. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука. 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 08.02.2024

После доработки 21.03.2024

Принята к публикации 29.03.2024

© 2024 г. Л.Б. РАПОПОРТ, д-р физ.-мат. наук (lbrapoport@gmail.com)
(Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл.),
А.А. ГЕНЕРАЛОВ, канд. техн. наук (generalov.alexey@gmail.com)
(Topcon Technology Finland, Эспоо),
Б.А. БАРУЛИН (barulin.ba@phystech.edu),
М.Д. ГОРБАЧЕВ (gorbachev.md@phystech.edu)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РАСШИРЕНИЕ МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА КОЛЕСЕ

Продолжается исследование синтеза стабилизирующих законов управления для механической системы, состоящей из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Цель управления состоит в одновременной стабилизации вертикального положения маятника и заданного положения колеса. Трудность этой задачи состоит в том, что одно управление используется для достижения двух целей – стабилизации угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Ранее предлагалось использовать метод линеаризации обратной связью по выходу. В качестве выхода берется сумма угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Для того, чтобы замкнутая система была не только асимптотически устойчивой по выходу, но и обладала асимптотически устойчивой нулевой динамикой, предлагалось к закону управления, стабилизирующему по выходу, добавлять диссипативное слагаемое.

В данной работе предложена двухпараметрическая модификация этого закона. Наряду с диссипативным слагаемым предлагается ввести положительный множитель. Более общая параметризация позволяет стабилизировать данную систему в случаях, когда использование ранее предложенного закона не давало результата.

Исследуются свойства нового закона управления и строится оценка области притяжения. Построение оценки сводится к задаче о разрешимости линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: асимптотическая стабилизация, перевернутый маятник, оценка области притяжения, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024040043, **EDN:** ZGNRPR

1. Введение

Механическая система, рассматриваемая в работе, состоит из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Колесо катится по плоской поверхности, пересечение которой с вертикальной плоскостью (рис. 1) образует ось ξ .

Эта система, также как и родственная ей система, состоящая из тележки с перевернутым маятником, исследуется во многих работах по теории управления, см., например, [1–11]. Список работ и анализ состояния исследований

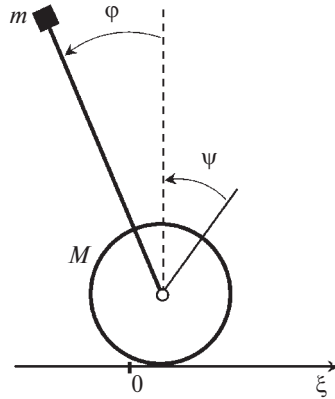


Рис. 1. Схема маятника на колесе.

в этой области можно найти в [1]. Отметим лишь, что эта система привлекает интерес как нелинейная, неустойчивая и неминимально фазовая система, на которой исследуются различные методы синтеза управления.

Во многих работах исследуется синтез управления, стабилизирующего вертикальное положение маятника в линеаризованной системе, см., например, [2, 3, 8]. Легко решается задача синтеза нелинейного контроллера с помощью метода линеаризации обратной связью [4] по выходу. В качестве выхода берется угол отклонения маятника. Однако это не решает полную задачу стабилизации по состоянию, поскольку нулевая динамика остается неустойчивой и положение центра колеса не стабилизируется. В [12] развивается подход к построению так называемых виртуальных выходов, стабилизация по которым гарантирует также и стабилизацию по состоянию. Применение этого подхода в общем виде сложно.

Краткий анализ подходов к решению задачи в нелинейной постановке дан в [1]. В [9] используется теория малых коэффициентов усиления. Работа [10] дает решение, основанное на синтезе оптимального по быстродействию управления. В [11] решается задача глобальной стабилизации и предлагается комбинированный закон управления, в котором при больших начальных отклонениях применяется управление маятником, гарантирующее попадание в область локальной стабилизируемости. Большое значение имеет построение оценки такой области. Очевидно, что оценка, зависящая от построенного закона управления и выбранной функции Ляпунова, может быть консервативной. Актуальна задача построения такой оценки максимального размера в классе, определенном параметрами функции Ляпунова.

Этой задаче посвящена настоящая работа, являющаяся продолжением [1], в которой показано, что если в качестве выхода взять сумму угла отклонения маятника и приведенного угла поворота колеса и синтезировать управление, стабилизирующее по этому выходу, то замкнутая система окажется устойчивой, хотя и не асимптотически. Стабилизация нулевого состояния получается добавлением к управлению слагаемого, пропорционального разнице угловых

скоростей колеса и маятника и имеющего смысл момента вязкого трения в оси колеса. Также в [1] получена оценка области притяжения состояния равновесия с помощью специально построенной функции Ляпунова, состоящей из квадратичной части и нелинейного слагаемого. Параметры функции Ляпунова находятся решением последовательности задач о совместности линейных матричных неравенств (ЛМН).

В данной работе предложена двухпараметрическая модификация закона управления, полученного методом линеаризации обратной связи по выходу. Наряду с диссипативным слагаемым, имеющим смысл момента силы вязкого трения в точке подвеса, предлагается ввести положительный множитель перед законом управления. Более общая параметризация позволяет стабилизировать данную систему в случаях, когда использование ранее предложенного закона не давало результата. В статье рассмотрен пример, иллюстрирующий это утверждение.

2. Модель системы

Используем математическую модель, описанную в [2] с обозначениями, введенными в [1]. Кроме того, используется введенная в последней работе замена переменной времени. Положительное значение углов отсчитывается против часовой стрелки. Итак, пусть

ξ – это положение центра колеса на горизонтальной оси рис. 1;

φ – угловое отклонение маятника от вертикальной оси;

l – длина маятника;

ψ – угол между вертикалью и некоторым выделенным радиусом колеса, причем нулевому значению ψ отвечает нулевое значение ξ ; $\psi = -\frac{\xi}{r}$;

m – масса, сосредоточенная на конце маятника;

M, J, r – масса, момент инерции и радиус колеса соответственно;

$\theta = \psi \frac{r}{l}$ – приведенный угол поворота колеса;

U – момент силы, развиваемый приводом и приложенный между маятником и колесом;

$u = \frac{U}{mgl}$, g – ускорение свободного падения;

t – время и $\tau = t\sqrt{g/l}$ – новая безразмерная независимая переменная;

' – производная по переменной τ .

Обозначим угловые скорости: $\omega = \varphi'$, $\delta = \theta'$ и $x = (\varphi, \omega, \theta, \delta)^T$. Использование Лагранжева формализма и независимой переменной τ дает уравнения движения в виде (см. [1])

$$\varphi' = \omega,$$

$$\omega' = f_1(x) + h_1(x)u,$$

$$\theta' = \delta,$$

$$\delta' = f_2(x) + h_2(x)u,$$

где

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_1(x) &= \frac{\sin \varphi}{d}[-\omega^2 \cos \varphi + (1 + \beta)], \\
 f_2(x) &= \frac{\sin \varphi}{d}(\omega^2 - \cos \varphi), \\
 h_1(x) &= \frac{1}{d}(\cos \varphi + 1 + \beta), \\
 h_2(x) &= \frac{1}{d}(-\cos \varphi - 1), \\
 \beta &= \frac{M + J/r^2}{m}, \\
 d &= \beta + \sin^2 \varphi.
 \end{aligned}$$

Обозначив $f = (\omega, f_1, \delta, f_2)^\top$ (символ зависимости от x для простоты опущен) и $h = (0, h_1, 0, h_2)^\top$, перепишем систему (2) в виде

$$(2) \quad x' = f + hu.$$

3. Синтез управления, стабилизирующего нулевое состояние равновесия системы (2)

Выберем в качестве выхода системы

$$(3) \quad y = \varphi + \theta$$

и синтезируем управление системой (2), гарантирующее асимптотическую устойчивость по этому выходу. Метод синтеза управления, стабилизирующего систему по выходу, описан, например, в [4, глава 12]. Получим выражение для закона управления:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad u^*(x) &= -\frac{\lambda^2 y + 2\lambda y' + F}{H} = \\
 &= -\frac{d\lambda^2(\varphi + \theta) + 2d\lambda(\omega + \delta) + \sin \varphi [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta]}{\beta}.
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad F = \frac{\sin \varphi}{d} [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta], \quad H = \frac{\beta}{d}.$$

В (4) параметр λ имеет смысл желаемого коэффициента экспоненциального затухания выхода замкнутой системы. Выход замкнутой системы будет удовлетворять линейному дифференциальному уравнению второго порядка с корнем характеристического полинома $-\lambda$ кратности 2.

Система (2), замкнутая управлением (4), принимает вид

$$(6) \quad x' = f(x) + h(x)u^*(x),$$

причем

$$f(0) = 0, \quad u^*(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Система (6), линеаризованная в окрестности нуля, имеет вид

$$(7) \quad x' = \Phi x, \quad \Phi = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} + h(0) \left. \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \right|_{x=0}^T.$$

Имеем

$$(8) \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\beta+2)\lambda^2+1}{\beta} & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda^2+1}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} & 2\frac{\lambda^2}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Сделаем линейную замену переменных $\zeta = Sx$, где

$$(9) \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другими словами,

$$\zeta_1 = \varphi, \quad \zeta_2 = \omega, \quad \zeta_3 = y, \quad \zeta_4 = y'.$$

В новых переменных матрица (8) принимает вид

$$(10) \quad \Phi_\zeta = S\Phi S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & 0 & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристические полиномы матриц Φ и Φ_ζ совпадают. Непосредственно из блочно-треугольного вида матрицы (10) следует, что ее спектр составлен из спектров двух диагональных блоков размера 2×2 . Таким образом, собственные числа матрицы (10) равны

$$(11) \quad \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\beta}}, \frac{i}{\sqrt{\beta}}, -\lambda, -\lambda \right\},$$

где i – это мнимая единица. Матрица Φ_ζ (так же как и Φ) имеет пару чисто мнимых корней и кратный отрицательный корень. Такое распределение корней отражает тот факт, что замкнутая система асимптотически устойчива по выходу и имеет нулевую динамику, не являющуюся асимптотически устойчивой.

Перейдем к синтезу закона управления, обеспечивающего асимптотическую стабилизацию системы (2). Ранее, в [1] было предложено добавить к управлению (4) диссипативное слагаемое, имеющее смысл вязкого трения в точке соединения маятника и колеса, а именно

$$(12) \quad u^{**}(x) = u^*(x) - k(\omega - \delta), \quad k > 0.$$

В настоящей работе рассматривается более общее параметрическое расширение закона управления (4). Кроме коэффициента k , на знак которого ограничений накладывать не будем, вводится множитель s . Выражение для нового закона управления имеет вид

$$(13) \quad u^{***}(x) = su^*(x) - k(\omega - \delta).$$

В новых переменных матрица системы (2), замкнутой управлением (13) и линеаризованной в окрестности нуля, имеет вид

$$(14) \quad \Phi_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\beta+1)(1-s)}{\beta} - \frac{s}{\beta} & -2k\frac{\beta+2}{\beta} & -\frac{(\beta+2)\lambda^2}{\beta}s & (k-2\lambda s)\frac{(\beta+2)}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-s & -2k & -\lambda^2 s & k-2\lambda s \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином этой матрицы равен

$$(15) \quad N(\mu, s) = \det(\mu I - \Phi_s) = \\ = \mu^4 + \left(2\lambda s + k\frac{4+\beta}{\beta}\right)\mu^3 + \left(\lambda^2 s + \frac{\beta+2}{\beta}(s-1) + \frac{1}{\beta}\right)\mu^2 + \frac{2\lambda s - k}{\beta}\mu + \frac{\lambda^2}{\beta}s.$$

Выясним, при каких значениях параметров s и k полином (15) имеет корни с отрицательными вещественными частями. Воспользуемся критерием Лъенара–Шипара (см., например, [14, параграф 3.5]). Для этого составим матрицу Гурвица

$$(16) \quad \begin{pmatrix} 2\lambda s + k\frac{4+\beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} & 0 & 0 \\ 1 & \lambda^2 s + \frac{\beta+2}{\beta}(s-1) + \frac{1}{\beta} & \frac{\lambda^2}{\beta}s & 0 \\ 0 & 2\lambda s + k\frac{4+\beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^2 s + \frac{\beta+2}{\beta}(s-1) + \frac{1}{\beta} & \frac{\lambda^2}{\beta}s \end{pmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием гурвицевости полинома (15) является положительность его коэффициентов и положительность третьего главного минора матрицы (16). Условия положительности коэффициентов полинома с учетом положительности λ и β принимают вид

$$(17) \quad -2\lambda s \frac{\beta}{\beta + 4} < k < 2\lambda s$$

и

$$(18) \quad s > \frac{\beta + 1}{\lambda^2 \beta + \beta + 2} \doteq \bar{s}.$$

Условие положительности третьего минора матрицы (16) принимает вид

$$(19) \quad \det \begin{pmatrix} 2\lambda s + k \frac{4 + \beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} & 0 \\ 1 & \lambda^2 s + \frac{\beta + 2}{\beta}(s - 1) + \frac{1}{\beta} & \frac{\lambda^2}{\beta} s \\ 0 & 2\lambda s + k \frac{4 + \beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} \end{pmatrix} > 0$$

и, после необходимых преобразований (здесь и далее использовался пакет компьютерной алгебры [13]),

$$\frac{\beta + 2}{\beta^3} \left\{ k^2 [\beta + 2 - (\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)s] - \right. \\ \left. - 4\lambda s k + 4\lambda s^2 [\lambda\beta(s - 1) + k(2 - \lambda^2\beta)] \right\} > 0.$$

Сократив на положительный множитель $(\beta + 2)/\beta^3$, представим его в окончательном виде

$$(20) \quad k^2 [\beta + 2 - (\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)s] + 4k\lambda s [s(2 - \lambda^2\beta) - 1] + 4\lambda^2 s^2 \beta (s - 1) > 0.$$

Покажем, что даже без диссипативного слагаемого в законе управления (13) (т.е. при $k = 0$) можно достичь асимптотической устойчивости замкнутой линеаризованной системы. Имеет место следующая

Лемма 1. При $k = 0$ условия гурвицевости полинома (15) выполняются при любом

$$(21) \quad s > 1.$$

Доказательство леммы дано в Приложении. Таким образом, асимптотическая устойчивость по выходу y превращается в асимптотическую устойчивость по состоянию с помощью коэффициента усиления, большего единицы, при управлении (4).

Слагаемые в (20) сгруппированы в виде полинома второй степени относительно k . Обозначим коэффициенты этого полинома через

$$(22) \quad \begin{aligned} c_0 &= \beta + 2 - (\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)s, & c_1 &= 4\lambda s [s(2 - \lambda^2\beta) - 1], \\ c_2 &= 4\lambda^2 s^2 \beta (s - 1). \end{aligned}$$

Символ зависимости коэффициентов от s для краткости опущен. Через s_0 обозначим значение, при котором c_0 обращается в ноль:

$$(23) \quad s_0 = \frac{\beta + 2}{(\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)},$$

причем

$$(24) \quad c_0 < 0 \quad \text{при} \quad s > s_0.$$

Имеет место следующая

Лемма 2. При любых значениях λ и $\beta > 0$ справедливо неравенство

$$(25) \quad s_0 < \bar{s} < 1,$$

или, другими словами, из выполнения условия (18) следует выполнение неравенства $c_0 < 0$.

Доказательство вынесено в Приложение.

Исследуем область асимптотической устойчивости системы (14) в пространстве параметров s, k . Обозначим эту область через Ω . Заметим, что граничная точка $1, 0$ области Ω не принадлежит. Лемма 1 утверждает, что отрезок $s > 1, k = 0$ принадлежит Ω . Насколько можно расширить эту область, выбирая $k \neq 0$ при различных значениях s , удовлетворяющих условию (18)? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1. Точка s, k принадлежит области Ω тогда и только тогда, когда совместно с (24) выполняются условия (17), (18),

$$(26) \quad c_1^2 - 4c_0c_2 > 0$$

и

$$(27) \quad \frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_0} < k < \frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_0}.$$

Для $s = 1$ точка $1, k$ принадлежит области Ω тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(28) \quad 0 < k < \frac{2\lambda(1 - \lambda^2\beta)}{1 + \lambda^2(\beta + 4)}.$$

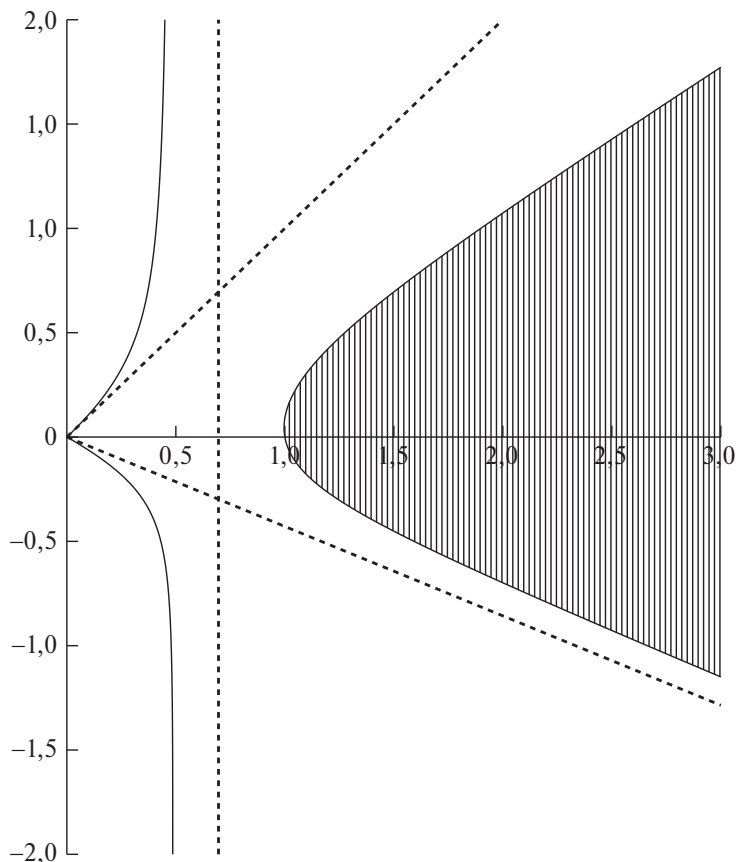


Рис. 2. Область Ω , отвечающая значениям $\beta = 3$ и $\lambda = 0,5$.

Доказательство вынесено в Приложение.

Неравенство (28) совпадает с ранее полученной в [1] оценкой коэффициента k , обеспечивающей асимптотическую устойчивость линеаризованной системы, замкнутой законом управления (12).

На рис. 2 показан пример области Ω . На рисунке наклонными пунктирными линиями изображена граница области (17), а вертикальная пунктирная линия изображает границу области (18). Сплошная тонкая линия изображает границу области определения неравенства (20). Как следует из рисунка, эта область имеет три компонента с криволинейными границами. Лишь одна из них, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и заштрихованная вертикальными линиями, является областью Ω .

На рис. 3 для сравнения показан в укрупненном масштабе фрагмент области Ω и область устойчивости, определяемой неравенством (28) при $s = 1$ и тех же значениях параметров β и λ . Из рисунка видно, что введение параметра s в закон управления (13) позволяет существенно расширить область устойчивости. Кроме того, можно получить асимптотическую устойчивость

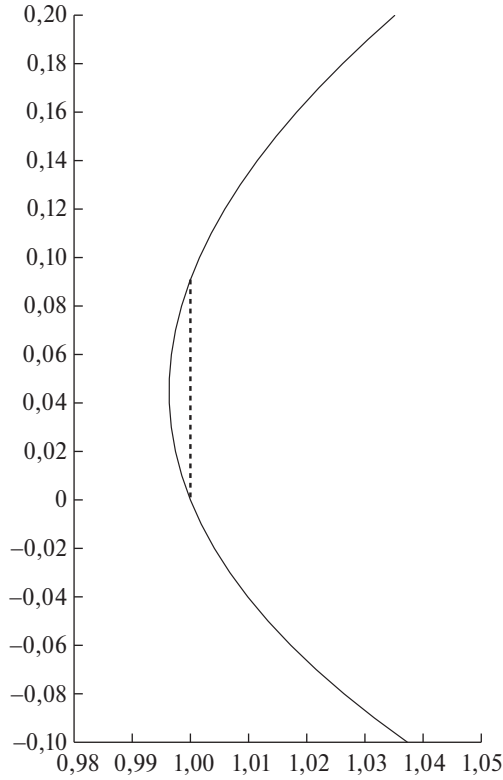


Рис. 3. Сравнение области Ω и ее части, изображенной пунктирным отрезком. Часть отвечает значению $s = 1$ и определяется неравенством (28).

при тех значениях параметров β и λ , при которых стабилизация законом управления (12) невозможна.

Рассмотрим теперь поведение системы (2), замкнутой управлением (13), не в окрестности нуля, а во всем пространстве. После перехода к переменным φ , ω , y , y' замкнутая система имеет вид

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & \varphi' = \omega, \\
 & \omega' = -s \frac{\beta + \cos \varphi + 1}{\beta} (\lambda^2 y + 2\lambda z) - s \frac{1 + \omega^2}{\beta} \sin \varphi - \\
 & \quad - k \frac{\beta + \cos \varphi + 1}{\sin^2 \varphi + \beta} (2\omega - z) - (s - 1) \frac{(\beta + 1 - \omega^2 \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi + \beta} \sin \varphi, \\
 & y' = z, \\
 & z' = -s (\lambda^2 y + 2\lambda z) - k \frac{\beta}{\sin^2 \varphi + \beta} (2\omega - z) - \\
 & \quad - (s - 1) \frac{(\omega^2 + 1) (1 - \cos \varphi) + \beta}{\sin^2 \varphi + \beta} \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Система (29) может быть переписана в виде

$$\zeta' = \Psi(\gamma)\zeta,$$

$$(30) \quad \Psi(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma_4 - 1)}{\beta}s - \gamma_5(s - 1) & -2\gamma_3k & -\gamma_2\lambda^2s & \gamma_3k - 2\gamma_2\lambda s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma_6(s - 1) & -2\gamma_1k & -\lambda^2s & \gamma_1k - 2\lambda s \end{bmatrix},$$

где с учетом $d = \beta + \sin^2 \varphi$:

$$(31) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\beta}{d}, \\ \gamma_2 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta}, \\ \gamma_3 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{d}, \\ \gamma_4 &= 1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}(1 + \omega^2), \\ \gamma_5 &= \frac{1 + \beta - \omega^2 \cos \varphi}{d} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right), \\ \gamma_6 &= \frac{(1 + \omega^2)(1 - \cos \varphi) + \beta}{d} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Относительно области изменения угла φ сделаем

Предположение 1. Предположим, что на траекториях управляемой системы (2) выполняются условия

$$(32) \quad |\varphi| \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \quad |\omega| \leq \omega_0,$$

где φ_0, ω_0 – некоторые положительные константы.

Система (30), эквивалентная (29), нелинейна. Наряду с ней рассмотрим линейную нестационарную систему

$$(33) \quad \zeta' = \Psi(\gamma(\tau))\zeta,$$

где числа $\gamma_l(\tau)$, $l = 1, \dots, 6$, представляют собой произвольно меняющиеся во времени τ измеримые функции, стесненные только двусторонними ограниче-

ниями, следующими из выражений (31) и предположения 1:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(\tau) &\in \left[\frac{\beta}{d_0}, 1 \right], \\
 \gamma_2(\tau) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{\beta}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\
 \gamma_3(\tau) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{d_0}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\
 \gamma_4(\tau) &\in [-\omega_0^2, 1 - r_0], \\
 \gamma_5(\tau) &\in \left[\min \left\{ \frac{1 + \beta - \omega_0^2}{\beta}, \frac{1 + \beta - \omega_0^2 \cos \varphi_0}{d_0} r_0 \right\}, \frac{\beta + 1}{\beta} \right], \\
 \gamma_6(\tau) &\in \left[\frac{1 - \cos \varphi_0 + \beta}{d_0} r_0, \max \left\{ 1, \frac{(1 - \cos \varphi_0)(1 + \omega_0^2) + \beta}{d_0} r_0 \right\} \right],
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

где

$$d_0 = \beta + \sin^2 \varphi_0 \quad \text{и} \quad r_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}.$$

Множество решений системы (33) при всевозможных значениях $\gamma_l(\tau)$ шире, чем множество решений нелинейной системы (29). Поэтому требование абсолютной устойчивости нулевого решения системы (33) в классе функций $\gamma_l(\tau)$, подчиненных ограничениям (34), обеспечит также и устойчивость нулевого решения системы (29). Метод погружения в более широкий в смысле множества решений класс систем дает достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (29). Для получения таких условий выберем функцию Ляпунова, имеющую отрицательную производную одновременно для всех систем (33), (34).

В качестве кандидата выберем функцию

$$(35) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^T P \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\omega^2 \beta}{2} \right],$$

параметризованную положительно определенной матрицей $P \succ 0$ (знаки \succ , \prec , \succeq и \preceq означают положительную и отрицательную определенность и полуопределенность соответственно) и неотрицательным числом $\alpha \geq 0$. Разложение нелинейного слагаемого с множителем α в ряд Тейлора в выражении (35) начинается с членов третьего порядка и служит поправкой к квадратичной форме для лучшего учета нелинейных свойств системы (33). Выражение $1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2)$ представляет собой первый интеграл предельной системы, введенной в [1]. Требование отрицательной определенности производной функции (35) в силу системы (33) при всевозможных значениях $\gamma_l(\tau)$, $l = 1, \dots, 6$, из интервалов (34) будет представлено в виде системы ЛМН.

Производная функции (35) в силу системы (33) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (36) \quad V' &= \zeta^T P \Psi(\gamma) \zeta + \alpha \left[\sin \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \zeta_2 + \right. \\
 &+ \frac{\beta \zeta_2}{1 + \zeta_2^2} \left(\gamma_5 (1 - s) \zeta_1 - (1 + \zeta_2^2) \frac{s}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4 \right) - \\
 &- \beta \zeta_2 \left(\gamma_5 (1 - s) \zeta_1 - (1 + \zeta_2^2) \frac{s}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4 \right) \left. \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4) \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4 + \right. \\
 &\quad \left. + (s - 1) \zeta_1 \zeta_2 \left(1 - \beta \gamma_5 \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) - \gamma_4 - \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} \right) \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4) \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4 + \right. \\
 &\quad \left. + (s - 1) \zeta_1 \zeta_2 \left(\zeta_2^2 \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} - \beta \gamma_5 \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \right) \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_9 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_8 s \zeta_3 + (k\gamma_9 - 2\lambda\gamma_8 s) \zeta_4) \beta - \gamma_4 \zeta_1 \zeta_2 + \gamma_7 (s - 1) \zeta_1 \zeta_2 \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= -\frac{\zeta_2^2}{1 + \zeta_2^2}, \\
 \gamma_7 &= \frac{\omega^2 \sin \varphi}{\varphi} \left(1 + \frac{\beta}{(1 + \omega^2)} \frac{(\beta + 1 - \omega^2 \cos \varphi)}{d} \right), \\
 \gamma_8 &= \gamma_0 \gamma_2, \\
 \gamma_9 &= \gamma_0 \gamma_3.
 \end{aligned}$$

Для определенных выше величин выполняются следующие двусторонние оценки:

$$\begin{aligned}
 (37) \quad \gamma_0 &\in \left[-\frac{\omega_0^2}{1 + \omega_0^2}, 0 \right], \\
 \gamma_7 &\in \left[0, \max \left\{ \omega_0^2 r_0 \left(1 + \frac{\beta (\beta + 1 - \omega_0^2 \cos \varphi_0)}{(1 + \omega_0^2)(\beta + \sin^2 \varphi_0)} \right), \frac{\omega_0^2 (2 + \beta)}{(1 + \omega_0^2)} \right\} \right], \\
 \gamma_8 &\in \left[-\frac{\omega_0^2 (2 + \beta)}{\beta (1 + \omega_0^2)}, 0 \right], \\
 \gamma_9 &\in \left[-\frac{\omega_0^2 (2 + \beta)}{\beta (1 + \omega_0^2)}, 0 \right].
 \end{aligned}$$

Учитывая, что в соответствии с выражениями (34) величины γ_2 и γ_3 принимают максимальные значения одновременно, получаем, что и величины γ_8 и γ_9 принимают минимальные значения $-\frac{\omega_0^2(2+\beta)}{\beta(1+\omega_0^2)}$ и максимальные значения 0 одновременно. Тогда в выражении (36) достаточно оставить одно значение γ_8 и записать

$$(38) \quad V' = \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\beta \gamma_8 \zeta_2 (-2k \zeta_2 - \lambda^2 s \zeta_3 + (k - 2\lambda s) \zeta_4) + (\gamma_7(s - 1) - \gamma_4) \zeta_1 \zeta_2].$$

В следующем разделе условие $V' < 0$ будет представлено в терминах ЛМН.

4. Оценка области притяжения нулевого положения равновесия

Выражение для функции Ляпунова (35) представим в виде

$$(39) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) \right] \geq \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta,$$

где через $Q(\alpha)$ обозначена матрица

$$(40) \quad Q(\alpha) = P - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потребовав выполнение неравенства

$$Q(\alpha) \succeq \varepsilon I,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, получаем из (39), что функция $V(\zeta)$ положительно определена. Далее, выражение (38) для V' аффинно зависит от произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 8$, каждый из которых принимает значения из отрезка. При этом вектор γ принимает значения из декартова произведения восьми отрезков. Это множество (обозначим его как $\Gamma \subset R^8$) выпукло и имеет 256 крайних точек, получающихся приравниванием произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 8$, своим минимальным и максимальным значениям в отрезках (34) и (37). Квадратичная форма (38), матрица которой аффинно зависит от параметров γ , отрицательно определена для всех $\gamma \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда она отрицательно определена на крайних точках этого множества, т.е. на векторах γ_i . Поэтому условие $V' < 0$ эквивалентно системе из 256 ЛМН, каждое из которых соответствует одному из векторов γ^i , $i = 1, \dots, 256$. Для всевозможных γ^i получим систему ЛМН (одно ЛМН большей размерности)

$$(41) \quad P \Psi(\gamma^i) + \Psi^T(\gamma^i) P - \alpha Y(\gamma^i) \preceq 0,$$

где

$$Y(\gamma^i) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4^i - \gamma_7^i(s-1) & 0 & 0 \\ \gamma_4^i - \gamma_7^i(s-1) & 4\beta\gamma_8^i k & \beta\gamma_8^i \lambda^2 s & \beta\gamma_8^i (2\lambda s - k) \\ 0 & \beta\gamma_8^i \lambda^2 s & 0 & 0 \\ 0 & \beta\gamma_8^i (2\lambda s - k) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так построенная система ЛМН может оказаться несовместной при заданных значениях φ_0 и ω_0 . Введем в рассмотрение параметр $a \in [0, 1]$ и выберем в качестве φ_0 и ω_0 величины

$$\varphi_0(a) = a \frac{\pi}{2}, \quad \omega_0(a) = a\bar{\omega},$$

где $\bar{\omega} = \sqrt{e^{\frac{4}{\beta}} - 1}$. Каждому значению $\varphi_0(a), \omega_0(a)$ отвечают значения границ интервалов (34) и (37) и, следовательно, 256 векторов $\gamma^i(a)$. Из выражений для границ интервалов видно, что векторы $\gamma^i(a)$ непрерывно зависят от a . При $a = 0$ нижние и верхние границы интервалов совпадают. Поэтому при $a = 0$ имеем

$$\gamma^i(0) \doteq \gamma^0 = \left[1, \frac{2+\beta}{\beta}, \frac{2+\beta}{\beta}, 0, \frac{1+\beta}{\beta}, 1, 0, 0 \right]^T.$$

В силу выражений для матриц (14) и (30) имеем $\Psi(\gamma^0) = \Phi_s$. Тогда теорема 1 гарантирует совместность системы ЛМН (41) для достаточно малых значений $a > 0$.

Пусть a^* – это точная верхняя грань тех a , при которых система ЛМН относительно переменных P и α

$$(42) \quad \begin{aligned} P\Psi(\gamma^i(a)) + \Psi^T(\gamma^i(a))P - \alpha Y(\gamma^i(a)) &\leq 0, \\ Q(\alpha) &\succeq \varepsilon I, \\ \text{tr}(Q(\alpha)) &= 1 \end{aligned}$$

совместна. Последнее линейное уравнение, приравнивающее след $Q(\alpha)$ единице, добавлено для нормировки решения, поскольку в противном случае множество решений ЛМН образовывало бы конус и вместе с любым решением P и α было бы также решением σP и $\sigma \alpha$ при любых $\sigma > 0$, включая как угодно большие и как угодно малые значения.

Величина a^* получается последовательной проверкой совместности (42) для возрастающей последовательности значений a .

Итак, при выполнении предположения 1, где $\varphi_0 = a^* \frac{\pi}{2}$ и $\omega_0 = a^* \bar{\omega}$, функция Ляпунова (35) имеет отрицательно определенную производную в силу системы (30). Если найдется такая константа $c > 0$, что множество

$$(43) \quad \Omega_c = \{\zeta : V(\zeta) \leq c\}$$

окажется вписано внутрь множества

$$(44) \quad \Pi_0 = \{ \zeta : |\varphi| \leq \varphi_0, |\omega| \leq \omega_0 \},$$

то любая траектория замкнутой системы (30), начатая внутри множества Ω_c , остается внутри этого множества для любых моментов времени в силу отрицательности производной V' . В результате при выполнении

$$(45) \quad \Omega_c \subset \Pi_0$$

предположение 1 будет выполняться вдоль всей траектории замкнутой системы (30), начавшейся изнутри множества Ω_c . Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и величина a^ выбрана как точная верхняя грань тех a , при которых ЛМН (42) совместно. Тогда если константа c выбрана таким образом, что выполняется условие (45), то множество Ω_c является областью асимптотической устойчивости системы (2), замкнутой управлением (13).*

Способ нахождения константы c , обеспечивающей выполнение (45), приведен в [1].

5. Пример построения области притяжения

Рассмотрим пример, отвечающий значению $\beta = 3$. Параметры закона управления (13) выбраны удовлетворяющими условиям теоремы 1 и равными $\lambda = 0,578$, $k = 0$ и $s = 1,5$. Этот пример интересен тем, что при выбранных значениях параметров β и λ не удовлетворяется условие (28) и, следовательно, рассматриваемая механическая система не может быть стабилизирована управлением (12) ни при каком значении параметра k . Однако система может быть стабилизирована управлением (13) при $s > 1$ и $k = 0$. Проверка разрешимости ЛМН (42) при максимально возможном значении параметра a^* дает следующие параметры функции Ляпунова:

$$P = \begin{bmatrix} 0,068 & -0,040 & 0,037 & 0,167 \\ -0,040 & 0,128 & -0,070 & -0,247 \\ 0,037 & -0,070 & 0,070 & 0,175 \\ 0,167 & -0,247 & 0,175 & 0,734 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0,000017,$$

достигнутые при $a^* = 0,349$.

С использованием результата теоремы 2 инвариантная область притяжения замкнутой системы строится таким же образом, как это было описано в [1]. Опуская детали, приведем полученное значение: $c = 0,0036466$. Для проверки разрешимости ЛМН был использован пакет Scilab [15].

На рис. 4 приведены траектории замкнутой системы в координатах θ (ось абсцисс) и δ (ось ординат). В качестве управления применен комбинированный закон. Если состояние системы не попадает в область притяжения Ω_c ,

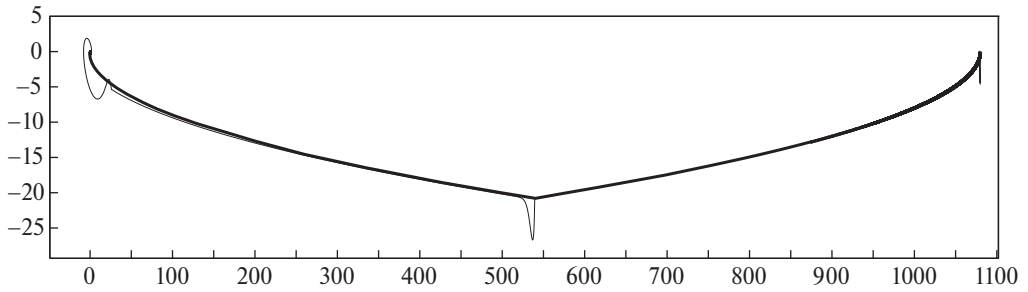


Рис. 4. Траектории замкнутой системы в координатах θ (ось абсцисс) и δ (ось ординат).

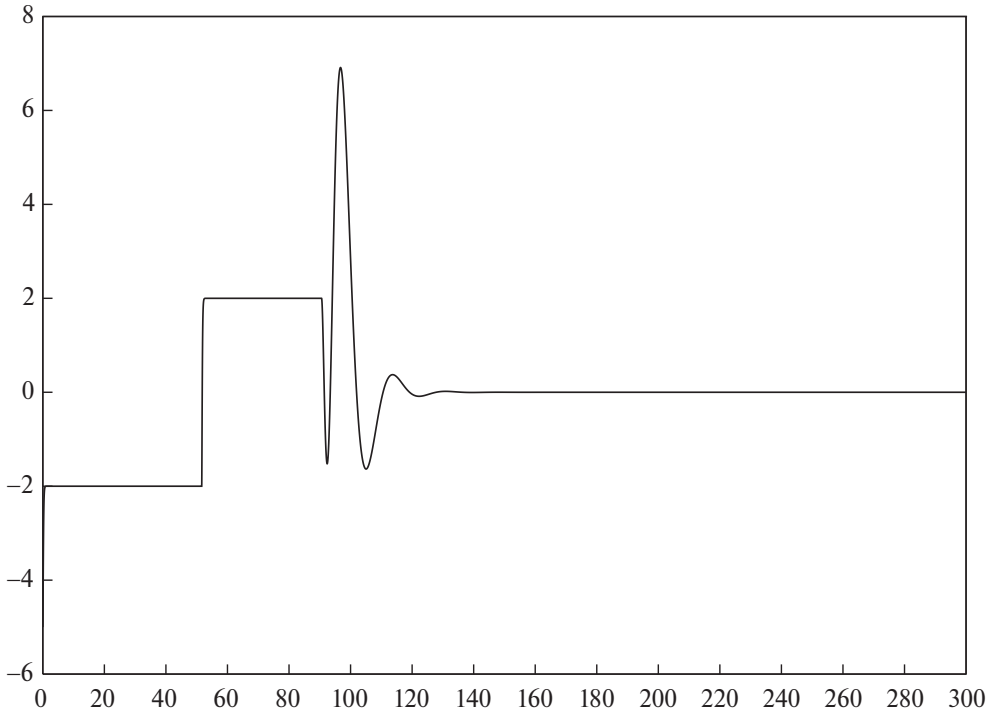


Рис. 5. График изменения переменной φ .

то применяется управление, описанное в [1, раздел 5]. Критерием пересечения границы области Ω_c является выполнение условия $V(\zeta^*) = c$. После попадания в область Ω_c происходит переключение на закон управления (13). Угловые переменные на рисунках показаны в градусах. Угловая скорость показана в градусах на безразмерную единицу времени τ . Тонкой линией изображена траектория системы (2) замкнутой комбинированным законом управления при величине $\bar{\varphi} = 2^\circ$ (см. (5.2) из [1]) и начальных условиях $\varphi(0) = -5^\circ$, $\omega(0) = 0$, $\theta(0) = 1080^\circ$, $\delta(0) = 0$. Жирной линией изображена оптимальная траектория системы (5.5) при управлении (5.6) работы [1].

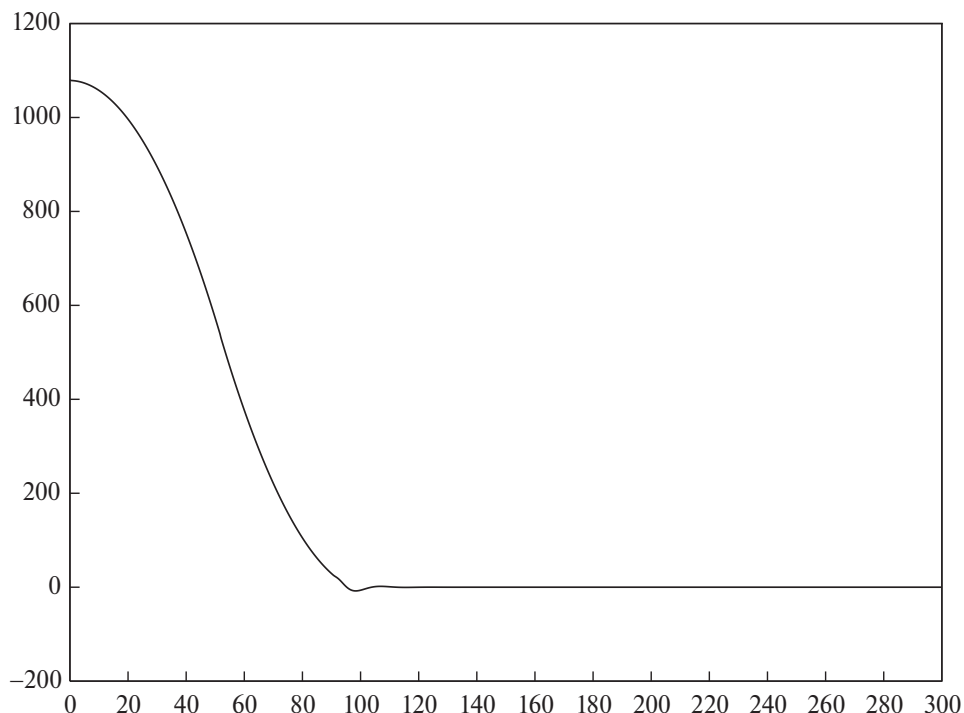


Рис. 6. График изменения переменной θ .

Графики углов φ и θ приведены на рис. 5 и 6, где по оси абсцисс отложено время в безразмерных единицах τ . Из рис. 5 видно, что на начальном этапе, когда реализуется закон управления (5.2) работы [1] значение переменной φ стабилизируется на значении сначала -2° , затем 2° , и в момент времени примерно $\tau \sim 90$ происходит переключение на закон управления (13), после чего происходит асимптотическая стабилизация нулевого положения равновесия.

6. Заключение

В работе рассмотрена задача стабилизации вертикального положения перевернутого маятника, закрепленного на колесе. Предложено двухпараметрическое расширение закона управления, стабилизирующего одновременно угол отклонения маятника от вертикали и угол поворота колеса. Задача стабилизации решается методом линеаризации обратной связи по выходу, в качестве которого берется сумма углов поворота колеса и отклонения маятника. В отличие от ранее опубликованной работы [1] наряду с добавлением диссипативного слагаемого предлагается ввести дополнительный множитель. На численном примере показано, что использование нового закона управления позволяет стабилизировать систему в случае, когда система не может быть стабилизирована предложенным ранее законом управления. Дается оценка

области притяжения нулевого положения равновесия, построение которой сводится к задаче о разрешимости системы линейных матричных неравенств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. При $k = 0$ условие (17) принимает вид $s > 0$, а условие (20) принимает вид

$$4\lambda^2 s^2 \beta (s - 1) > 0,$$

что совместно с первым неравенством и положительностью β дает $s > 1$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Из определения (18) величины \bar{s} и $\beta > 0$ непосредственно видно, что $\bar{s} < 1$. Несложные алгебраические преобразования, сделанные с помощью пакета [13], дают

$$\bar{s} - s_0 = \frac{\lambda^2 \beta^2 + 8\lambda^2 \beta + 8\lambda^2 + \beta}{(\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)(\lambda^2 \beta + \beta + 2)},$$

откуда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что линии $k = 2\lambda s$ и $k = -2\lambda s \frac{\beta}{\beta+4}$, определяющие границу области определения неравенства (17), не пересекаются с границей (возможно не односвязной) области, определяемой (19). Действительно, подстановка $k = 2\lambda s$ в левую часть неравенства (19) приводит к противоречию

$$-8\lambda^4 s^3 (\beta + 2) > 0.$$

Аналогично к противоречию приводит подстановка в (19) равенства $k = -2\lambda s \frac{\beta}{\beta+4}$:

$$-\frac{8\beta\lambda^2 s^2 (\beta + 2)}{(\beta + 4)^2} > 0.$$

Таким образом, граница области Ω образована точками s, k , удовлетворяющими условию (18) и обращающими левую часть неравенства (19) в ноль. Из леммы 2 следует, что для этих значений s коэффициент c_0 в (22) принимает отрицательные значения, т.е. график зависимости левой части (20) от переменной k представляет собой перевернутую параболу. Тогда отрезок значений k , при которых выполняется неравенство (20), имеет вид (27) при выполнении условия положительности детерминанта квадратичного неравенства (20).

При $s = 1$ имеем $c_2 = 0$, и неравенство (20) принимает вид

$$-k^2[2 + 2\lambda^2(\beta + 4)] + k(4\lambda - 4\lambda^3\beta) > 0,$$

откуда следует неравенство (28). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рапопорт Л.Б., Генералов А.А.* Управление перевернутым маятником на колесе // А и Т. 2022. № 8. С. 3–28.
Rapoport L.B., Generalov A.A. Control of an Inverted Pendulum on a Wheel // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. P. 1151–1171.
2. *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* Управляемый маятник на подвижном основании // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 9–23.
3. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012.
4. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. Москва-Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
5. *Utkin V.I., Guldner J., Shi J.* Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC Press, 2009.
6. *Ha J.-S., Lee J.-J.* Position Control of Mobile Two Wheeled Inverted Pendulum Robot by Sliding Mode Control // Proceedings of 12th International Conference on Control, Automation and Systems. 2012. P. 715–719.
7. *Li Z., Yang C., Fan L.* Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems. Springer, 2013.
8. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Стабилизация тележки с перевернутым маятником // А и Т. 2022. № 1. С. 95–112.
9. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
10. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Известия РАН. ТИСУ. 2007. № 1. С. 13–22.
11. *Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D.* Global stabilization of an inverted pendulum. Control strategy and experimental verification // Automatica. 2009. V. 45. P. 265–269.
12. *Ткачев С.Б.* Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных // Наука и образование. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 11. С. 1–29.
13. <https://wxMaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
14. *Воронов А.А.* Теория автоматического управления. Ч.1. 2-е изд., М.: Высш. шк., 1986.
15. <https://www.scilab.org/>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 27.11.2023

После доработки 11.02.2024

Принята к публикации 04.03.2024

© 2024 г. Ж.Т. ЖУСУБАЛИЕВ, д-р техн. наук (zhanybai@gmail.com)
(Юго-Западный государственный университет, Курск),
У.А. СОПУЕВ, канд. физ.-мат. наук (ulansoruev@mail.ru)
(Ошский государственный университет, Кыргызстан),
Д.А. БУШУЕВ, канд. техн. наук (untame@list.ru)
(Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова)

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ¹

Исследуется явление, связанное с захватом колебаний релейной системы внешним возбуждением (вынужденная синхронизация), которое проявляется в возникновении периодических движений, близких к «пачечной» ритмической активности нейронов, когда пакеты быстрых колебаний перемежаются с интервалами «молчания». Для изучения такого явления введено отображение окружности на себя, которое в зависимости от параметров может быть диффеоморфизмом или разрывным («gap map»). В обоих случаях отображение демонстрирует так называемую бифуркационную структуру «добавления периода» («period-adding»).

Выявлено, что число пачек на периоде периодического движения определяется его числом вращения, а длина интервалов между пачками – границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачке происходит через бифуркацию «граничного столкновения» («border collision»).

Ключевые слова: релейная система с гистерезисом и внешним периодическим возбуждением, система с двумя масштабами времени, разрывное отображение окружности, бифуркации граничного столкновения, бифуркация добавления периода.

DOI: 10.31857/S0005231024040052, EDN: ZGNQYR

1. Введение

Рассмотрим релейную систему с гистерезисом [1–3] и внешним периодическим возбуждением, состояние которой описывается дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad f(t, x) = \lambda(x - S(x, \eta) + \sigma(t)), \quad \sigma(t + \pi) = -\sigma(t),$$

¹ Жусубалиев Ж.Т. поддержан Минобрнауки РФ, программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (1.7.21/S-2; 1.71.23П). Сопуев У.А. поддержан грантом № 14-22 Ошского государственного университета. Работа Бушуева Д.А. выполнена в рамках реализации Федеральной программы поддержки университетов «Приоритет – 2030» с использованием оборудования на базе Центра высоких технологий БГТУ им. В.Г. Шухова

где t – время; x – неизвестная функция времени t из \mathbb{R} (выход системы); \dot{x} – производная x по t ; S – выходной сигнал релейного элемента; λ – величина обратно пропорциональная по модулю постоянной времени объекта; $\sigma(t) = \mu_0 + \mu_m \cos t$ – вынуждающая сила, где μ_0, μ_m – постоянная составляющая и амплитуда переменной составляющей $\sigma(t)$ соответственно.

Выходной сигнал S релейного элемента:

$$S(x, \eta) = \begin{cases} 1, & x < q - \chi, \quad \text{или} \quad q - \chi < x < q + \chi, \quad \text{и} \quad \eta = 1; \\ 0, & x > q + \chi, \quad \text{или} \quad q - \chi < x < q + \chi, \quad \text{и} \quad \eta = 0. \end{cases}$$

Здесь q – задающий сигнал; χ – величина гистерезиса релейного элемента (РЭ); $\eta = 0, +1$ – значения S после последнего переключения РЭ.

Как можно видеть из (1), правая часть содержит t , как и x . Функция f периодична по t с периодом 2π . Кроме того, функция $x(t)$, удовлетворяющая (1), инвариантна по отношению к сдвигу начала координаты t на 2π [4].

Параметры: $\lambda = -7,5/\pi$, $q = 4,0/\Gamma$; $\mu_0 = 1,5/\Gamma$; $\mu_m = 0,525/\Gamma$; $\chi = \chi_0/\Gamma$. В исследованиях варьировались Γ и χ_0 : $6,0 \leq \Gamma \leq 7,0$, $0,35 \leq \chi_0 \leq 0,65$.

К уравнению вида (1) приводят многие задачи механики, физики [5–7], биологии и медицины.

Сюда относятся, например, математические модели для изучения атриоventрикулярной блокады Венкебаха в кардиологии [8–10], биологических механизмов регуляции сна и бодрствования [11–14], ритмической активности нейронов [15–21]. В [22] было показано, что при принятых идеализациях к уравнению (1) можно свести математическую модель вибрационной машины с дебалансным возбуждением колебаний и релейным управлением.

Рассматриваемый класс релейных систем относится к системам с двумя масштабами времени («systems with fast and slow dynamics», см., например, [23, 24]), поведение которых определяют две частоты: частота вынуждающей силы и высокочастотные осцилляции, порождаемые быстрыми переключениями релейного элемента. Такие системы демонстрируют феномен, близкий к «пачечной» ритмической активности нейронов, когда пакеты быстрых колебаний перемежаются с интервалами «молчания». Типичным примером модельного отображения, описывающего такое поведение нейронов, является разрывное отображение Рулькова Н. [17]. Бифукационные механизмы возникновения пачечных колебаний изучались многими авторами (см., например, [18–21, 25]).

В данной работе изучается захват колебаний релейной системы внешним периодическим возбуждением, который проявляется в возникновении регулярных движений, близких к «пачечной» ритмической динамике нейронов. Сначала сводится дифференциальное уравнение (1) к отображению окружности на себя. Показано, что в зависимости от параметров, такое отображение является диффеоморфизмом на окружности или разрывным. Получено аналитически уравнение для границ разрыва (многообразие переключения) и границ поглощающей области в фазовом пространстве. Определена грани-

ца, разделяющая пространство параметров на области существования разрывного отображения и диффеоморфизма на окружности. В обоих случаях отображение демонстрирует так называемую бифуркационную структуру добавления периода («period-adding») [26, 27].

В [22] было показано как численно, так и экспериментально, что интервалам молчания отвечают фазы низкочастотных колебаний, которые прерываются пачками быстрых осцилляций. В представленной работе выявлено, что в области параметров, где отображение разрывное, число пачек на периоде периодического движения определяется числом вращения, а длина интервалов между пачками – границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачке происходит через бифуркацию граничного столкновения, когда одна из периодических точек отображения сталкивается с многообразием переключения, что отвечает касанию решения (1) при $S = 1$ верхнего порога переключения релейного элемента. Такую бифуркацию в негладких дифференциальных уравнениях называют «grazing bifurcation» («скользящая бифуркация») [28–31].

2. Математическая модель с дискретным временем

2.1. Отображение первого возвращения

В силу периодичности f по t с периодом 2π фазовая плоскость (1) представляет собой прямоугольник шириной 2π с отождествленными точками N' , N (рис. 1,а). Уравнение (1) сводится к системе автономных дифференциальных уравнений

$$(2) \quad \dot{\theta} = 1, \quad \dot{x} = f(\theta, x),$$

фазовыми переменными которой являются $\theta = t - 2\pi[t/(2\pi)]$ и x . Здесь $[\cdot]$ – функция, выделяющая целую часть аргумента.

Решение уравнения (2) при $S = 1$, начинающееся в точке, принадлежащей нижнему порогу переключения релейного элемента $q - \chi$, достигает точки верхнего порога $q + \chi$ спустя время z_k^+ . Затем (после переключения релейного элемента $S = 1 \rightarrow S = 0$) возвращается обратно в точку нижнего порога $q - \chi$ через z_k^- (см. рис. 1,б).

Соединим концы отрезка $[0; 2\pi]$ и образуем окружность единичного радиуса [1] (рис. 1,в). Тогда можно ввести отображение F , ставящее в соответствие каждой точке P_k на единичной окружности такую точку P_{k+1} , в которую перейдет P_k при повороте на угол θ_{k+1} согласно дифференциальным уравнениям (2) спустя время $z_k^+ + z_k^-$, где z_k^\pm – ширина импульсов при $S = 1$ и $S = 0$ соответственно (рис. 1,б,в).

Тогда изменение угла между последовательными точками $P_k = P(1, \theta_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ на единичной окружности описывается:

$$(3) \quad \theta \mapsto F(\theta) \bmod 2\pi, \quad F(\theta) = \theta + z^+(\theta) + z^-(\theta), \quad 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

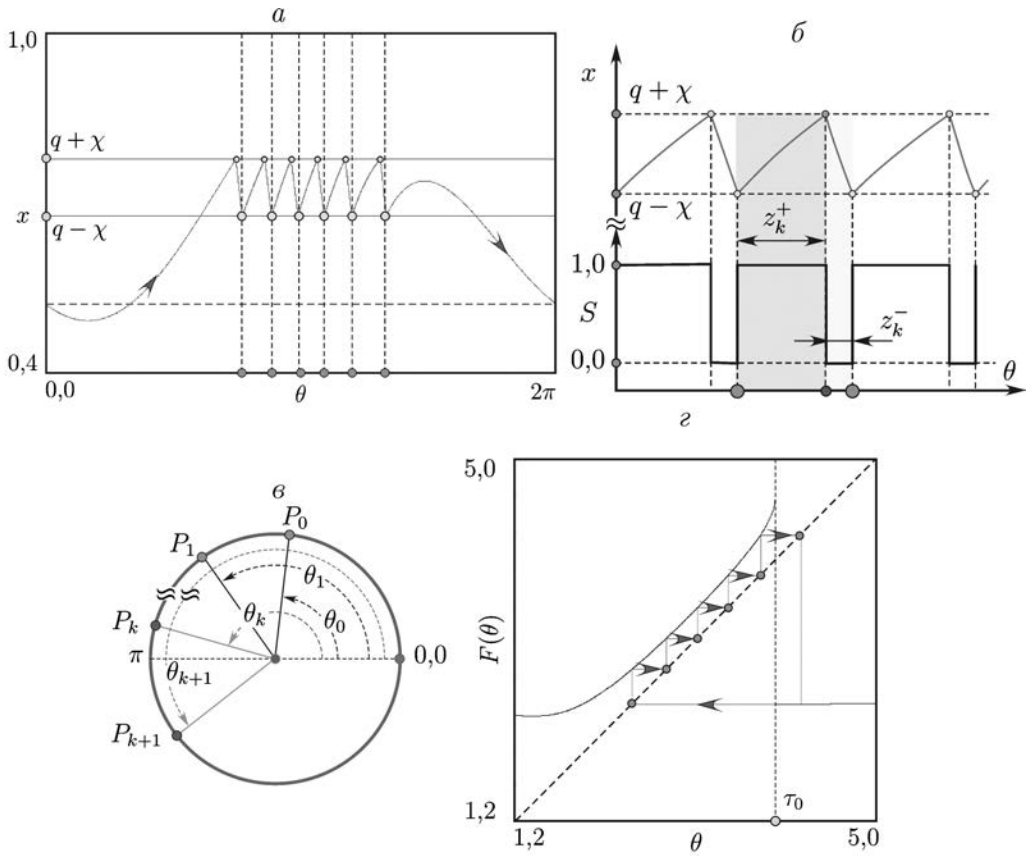


Рис. 1. *a* – Периодическое решение неавтономного уравнения (1). *б* – Увеличенный фрагмент решения на *a*, поясняющий технику получения отображения первого возвращения Пуанкаре. *в* – Отображение окружности на себя. *г* – Периодическая орбита отображения, соответствующая периодическому решению уравнения (1).

Здесь z^+ – наименьшее неотрицательное решение уравнения

$$q + \chi = e^{\lambda z^+} (q - \chi - 1 + \mu_0) + 1 - \mu_0 + A_m (\sin(\theta + z^+) - \lambda \cos(\theta + z^+)) - A_m e^{\lambda z^+} (\sin \theta - \lambda \cos \theta),$$

а z^- :

$$q - \chi = e^{\lambda z^-} (q + \chi + \mu_0) - \mu_0 + A_m (\sin(\theta' + z^-) - \lambda \cos(\theta' + z^-)) - A_m e^{\lambda z^-} (\sin \theta' - \lambda \cos \theta'), \quad A_m = \frac{\lambda \mu_m}{1 + \lambda^2}, \quad \theta' = \theta + z^+.$$

Отсюда орбита точки θ_0 будет

$$\theta_1 = F(\theta_0), \theta_2 = F(\theta_1) = F^2(\theta_0), \dots, \theta_k = F^k(\theta_0), \dots$$

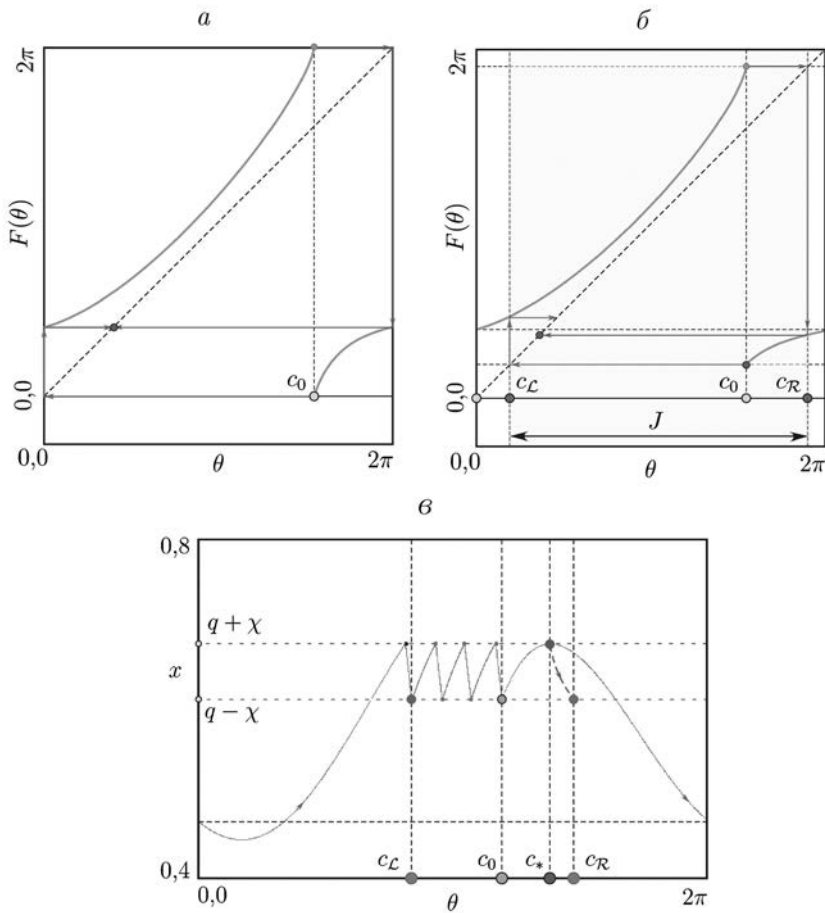


Рис. 2. *a* – Диффеоморфизм на окружности. *б* – Разрывное отображение («гар тар»). *в* – К определению точки разрыва F и границ поглощающей области J .

Характер движения на окружности определяется числом вращения

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^k(\theta) - \theta}{2\pi k}.$$

Если число вращения рациональное $r = \frac{n}{m}$, где n, m – целые числа, то существует θ_0 такое, что

$$F^m(\theta_0) = \theta_0 \text{ mod } 2\pi$$

и орбита на окружности является m -периодической.

Если же r – иррациональное число, то в случае диффеоморфизма движение квазипериодическое: каждая итерация отображения дает новую точку на единичной окружности и ни одна из этих точек не повторяется. Тогда P_k образуют плотное множество на окружности.

Это относилось к свойствам диффеоморфизмов. Если же отображение необратимое или разрывное, то указанные свойства сохраняются, но есть различия. Подробное обсуждение этих различий можно найти в [26].

Для описания орбиты начальной точки θ_0 системы (3), следуя [26], можно использовать два символа \mathcal{L} и \mathcal{R} («left», «right»). Тогда орбита $\mathcal{O}(\theta_0) = \{\theta_i = F^i(\theta_0), i = 0, 1, 2, \dots\}$ описывается последовательностью:

$$(4) \quad \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \cdots,$$

где символ $\bar{\sigma}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ в этой последовательности для каждого $i \geq 0$ определяется как

$$\bar{\sigma}_i = \begin{cases} \mathcal{L}, & \theta_i < c_0; \\ \mathcal{R}, & \theta_i > c_0. \end{cases}$$

В одномерных отображениях с одной точкой разрыва число вращения r периодической орбиты периода m

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m(\theta) &= \{\theta \in I : \theta, F^k(\theta), k = 1, \dots, m-1\}, \\ F^m(\theta) &= \theta, F^k(\theta) \neq \theta \end{aligned}$$

находится как [26]

$$r = \frac{N_{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_m)}{N_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_m) + N_{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_m)},$$

где $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_m)$, $N_{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_m)$ – число символов \mathcal{L} и \mathcal{R} в (4).

2.2. Свойства отображения

- Перепишем отображение (3) в виде

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= F(\theta_k), \\ F(\theta) &= \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(\theta), & \theta < c_0; \\ F_{\mathcal{R}}(\theta), & \theta > c_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Функции $F_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{R}}$ непрерывны и строго возрастают на отрезках $[F_{\mathcal{R}}(c_0); c_0]$ и $[c_0; F_{\mathcal{L}}(c_0)]$ соответственно. Отображение F не имеет неподвижных точек в $(F_{\mathcal{R}}(c_0); F_{\mathcal{L}}(c_0))$.

- Если

$$F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_0) < F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}}(c_0),$$

тогда каждая точка $\theta \in J$ имеет либо единственный прообраз, либо не имеет прообразов внутри J .

Если существует непустой подинтервал $(F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_0); F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}}(c_0))$, состоящий из точек, не имеющих прообразов в J , то в этом случае говорят что F является разрывным («gar map»).

- На рис. 2,а изображен случай, когда F – функция непрерывная и монотонно возрастающая. Тогда F содержит одну фиктивную точку разрыва, такую, что

$$F_{\mathcal{R}}(c_0) = F_{\mathcal{L}}(c_0)$$

и $F(\theta + 2\pi) = F(\theta) + 2\pi$.

- На рис. 2,б показан случай, когда F содержит одну точку разрыва. Как возникает разрыв, поясняется далее. Более того, точки $c_{\mathcal{L}} = F_{\mathcal{R}}(c_0)$ и $c_{\mathcal{R}} = F_{\mathcal{L}}(c_0)$, называемые критическими точками ранга один, определяют границы инвариантной поглощающей области $J = [c_{\mathcal{L}}; c_{\mathcal{R}}]$. Функция F может иметь локальные экстремумы, но они находятся вне J . Поэтому внутри J функция F является кусочно возрастающей. Более того, в этом случае $F_{\mathcal{L}}(c_0) < F_{\mathcal{R}}(c_0)$, так что в поглощающей области J отображение F является разрывным («гар шар»)(см. рис. 2,в).
- Условие, когда отображение F становится разрывным, формулируется утверждением 1.

Утверждение 1. Разрыв F возникает, когда решение $x(t)$ уравнения (1) при $S = 1$, начинающееся в точке нижнего порога $q - \chi$ переключения релейного элемента, касается верхнего порога переключения $q + \chi$. В этом случае функция F имеет точку разрыва c_0 , которая удовлетворяет уравнению

$$(5) \quad F(c_0) = c_*,$$

где $F(y) = y + z^+(y)$ [22, 27].

Легко видеть, что функция F в правой части уравнения (5) задана неявно. Цель состоит в том, чтобы получить уравнение относительно точки разрыва c_0 в явном виде.

Условие касания $x(t)$ верхнего порога переключения $q + \chi$ релейного элемента записывается как

$$(6) \quad \varphi_t + \varphi_x \dot{x}(t)|_{t=c_*} = 0, \quad \varphi = q + \chi - x.$$

Так как $\varphi_t = 0$ и $\varphi_x = -1$, то (6) эквивалентно

$$\dot{x}(t)|_{t=c_*} = 0, \quad \dot{x} = \lambda(x - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos t).$$

Отсюда

$$x(c_*) - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos c_* = 0.$$

Принимая во внимание, что $x(c_*) = q + \chi$, получим

$$q + \chi - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos c_* = 0.$$

Решив это уравнение относительно c_* , получим

$$c_* = 2\pi - \arccos\left(\frac{1 - q - \chi - \mu_0}{\mu_m}\right),$$

если $-1 \leq \frac{1 - q - \chi - \mu_0}{\mu_m} \leq +1$.

Из условия $-1 \leq \frac{1 - q - \chi - \mu_0}{\mu_m} \leq +1$ находим границу L , разделяющую в пространстве параметров области существования разрывного отображения и диффеоморфизма. Обозначим эти области как Π_{gap} и Π_{circle} . Граница между Π_{gap} и Π_{circle} на плоскости варьируемых параметров (χ_0, Γ) есть

$$(7) \quad L = \{(\chi_0, \Gamma) : \Gamma = 6,025 + \chi_0\}.$$

После того, как найдена c_* , определим точку разрыва c_0 . Для получения уравнения относительно c_0 в явном виде, используем условие касания

$$(8) \quad x(c_*) - 1 + \mu_0 + \mu_m \cos c_* = 0.$$

Поскольку

$$(9) \quad \begin{aligned} x(c_*) &= e^{\lambda(c_* - c_0)}(q - \chi - 1 + \mu_0) + 1 - \mu_0 + \\ &+ A_m t(\sin c_* - \lambda \cos c_*) - A_m e^{\lambda(c_* - c_0)}(\sin c_0 - \lambda \cos c_0), \end{aligned}$$

то, подставив (9) в (8), получим:

$$\begin{aligned} e^{\lambda(c_* - c_0)}(q - \chi - 1 + \mu_0) + A_m(\sin c_* - \lambda \cos c_*) - \\ - A_m e^{\lambda(c_* - c_0)}(\sin c_0 - \lambda \cos c_0) + \mu_m \cos c_* = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение решается численно.

3. Бифуркационный анализ

На рис. 3,а изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма, рассчитанная численно на плоскости параметров (χ_0, Γ) , на которую нанесена граница L . Выше этой границы расположена область Π_{circle} , где отображение (2) есть диффеоморфизм на окружности, а ниже – область Π_{gap} существования разрывного отображения («gap map»).

На рис. 3,б приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, а на рис. 3,в – увеличенный фрагмент этой диаграммы, показывающий переход к синхронизации 1:5 и выход из нее через седло-узловую бифуркацию в области Π_{circle} . Сплошные линии соответствуют устойчивому 5-циклу, а пунктирные – седловому 5-циклу. На границах резонансного языка 1:5 устойчивый и седловой 5-циклы сливаются и исчезают. Области синхронизации имеют классическую структуру так называемых языков Арнольда [8]. Между языками Арнольда находятся области квазипериодических режимов с иррациональными числами вращения.

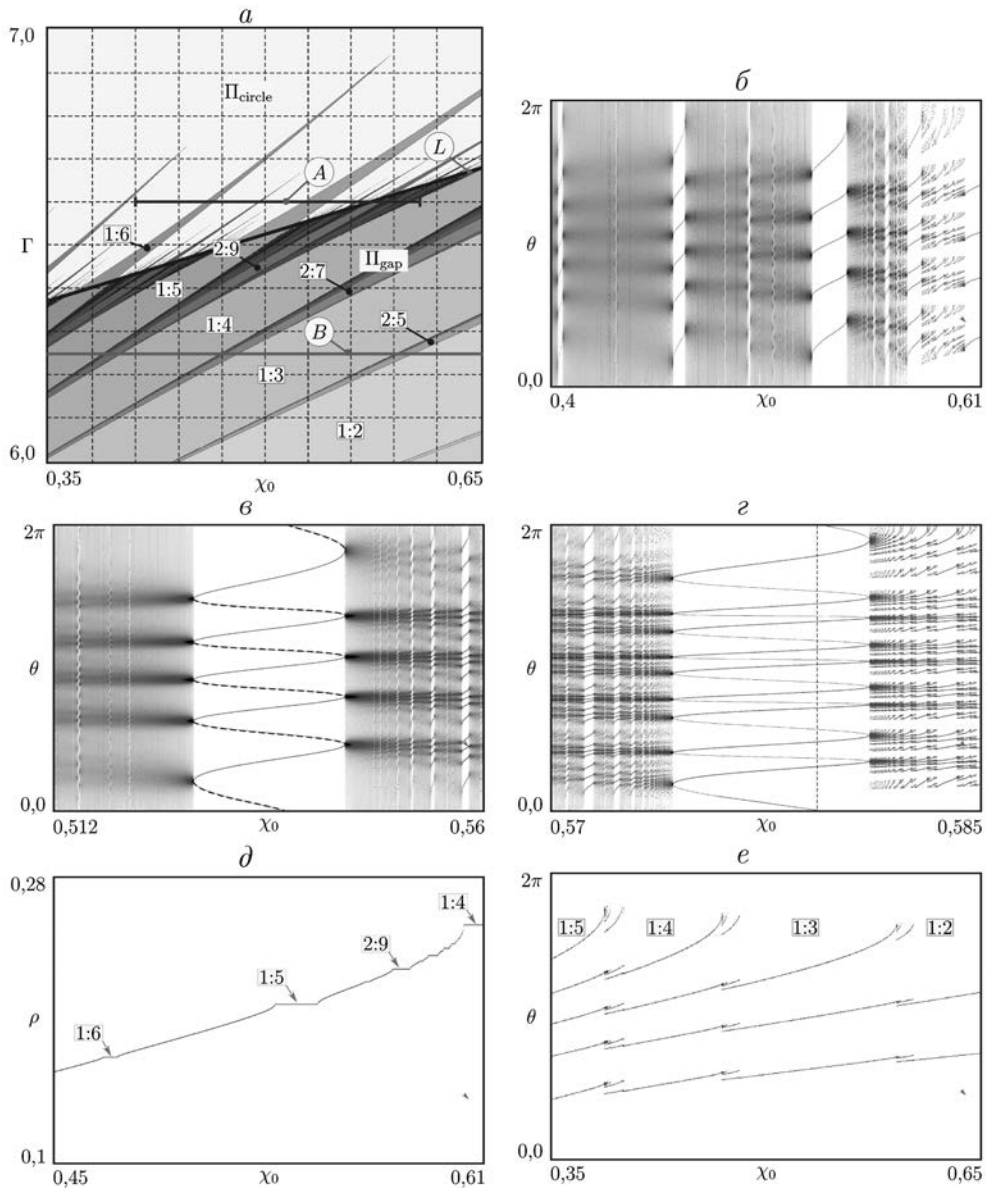


Рис. 3. *a* – Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (χ_0, Γ) отображения (3), на которую нанесена граница L (7). *б* – Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для сечения А: $0,4 \leq \chi_0 \leq 0,61, \Gamma = 6,6$. *в* – Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на *б* для окрестности резонанса $1:5$ области Π_{circle} : $(0,512 \leq \chi_0 \leq 0,56, \Gamma = 6,6)$. Здесь пунктирные линии отвечают неустойчивому 5-циклу, а сплошные – устойчивому. *г* – Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на *б* для окрестности резонанса $2:9$, часть которой находится в области Π_{circle} , а часть – в Π_{gap} (сечение А): $0,57 \leq \chi_0 \leq 0,585$ и $\Gamma = 6,6$. *д* – Чертова лестница: зависимость числа вращения r от χ_0 , $0,45 \leq \chi_0 \leq 0,61, \Gamma = 6,6$. *е* – Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для области Π_{gap} , иллюстрирующая каскад бифуркаций добавления периода: $0,35 \leq \chi_0 \leq 0,65, \Gamma = 6,25$, (сечение В).

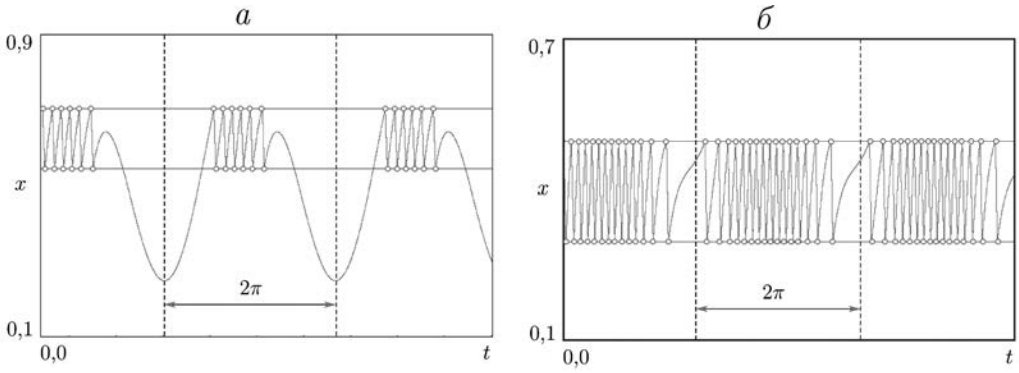


Рис. 4. *a* – Периодическое решение в области Π_{gap} . *б* – Периодическое решение в области Π_{circle} .

На рис. 3,г представлен увеличенный фрагмент диаграммы на рис. 3,б, иллюстрирующий бифуркационный переход, когда пересекается граница между областями Π_{circle} и Π_{gap} . Как можно видеть из этой диаграммы, вход в режим синхронизации порядка 2:9 происходит в Π_{circle} , а выход из нее – в области Π_{gap} . Исследования показали, что переход на границе языка 2:9 в Π_{circle} происходит через классическую седло-узловую бифуркацию, а на границе в области Π_{gap} – через седло-узловую бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold») [22].

На рис. 3,д показана так называемая «чертова лестница»: зависимость числа вращения от χ_0 . На этом рисунке выделены ступеньки, отвечающие резонансам 1:6, 1:5, 2:9 1:4.

На рис. 3,е приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, демонстрирующая каскад бифуркаций добавления периода в области Π_{gap} .

На рис. 4,а показано периодическое движение, иллюстрирующее пачечную динамику в области Π_{gap} для 1:6. Как можно видеть из этого рисунка, число пачек определяется числителем числа вращения. А интервал между пачками определяется границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачках происходит через бифуркацию граничного столкновения, когда одна из периодических точек попадает на границу разрыва F .

На рис. 4,б приведено периодическое решение в области Π_{circle} , где этот аттрактор локализован в зоне гистерезиса релейного элемента.

Изучение бифуркационных механизмов возникновения пачечных колебаний отображения (3) в области Π_{circle} – задача будущих исследований.

4. Заключение

Статья посвящена обсуждению необычного явления, обнаруженного в релейной системе с гистерезисом и внешним периодическим возбуждением. Этот феномен связан с вынужденной синхронизацией релейных систем и проявляется в возникновении периодической динамики, близкой к «пачеч-

ной» ритмической активности нейронов, когда пакеты быстрых колебаний перемежаются с интервалами «молчания».

Приводится методика изучения такого явления с помощью отображения окружности на себя. В зависимости от параметров отображение может быть диффеоморфизмом или разрывным («gap map»). Показано, что в обоих случаях отображение демонстрирует так называемую бифуркационную структуру «добавления периода» («period-adding»).

Выявлено, что в области Π_{gap} число пачек на периоде периодического движения определяется его числом вращения, а длина интервалов между пачками – границами поглощающей области. Изменение числа импульсов в пачке происходит через бифуркацию «граничного столкновения» («border collision»), которую в негладких дифференциальных уравнениях называют «скользящей бифуркацией» («grazing bifurcation»).

В силу того, что функция F кусочно-монотонно возрастающая с одной точкой разрыва c_0 в J (см. рис. 2, *a, б*, доказательство приведено в [22]), языки Арнольда с числами вращения $1:m$, $m = 2, 3, \dots$ (m – период цикла) на плоскости параметров не пересекаются [7]. Области периодичности, отвечающие устойчивым m -циклам более высоких уровней сложности, расположенные между этими языками, также не пересекаются. Отображение (3) демонстрирует типичное явление добавления периода, и в одномерных отображениях рассматриваемого класса не может быть бистабильного поведения [7, 26, 32–34]. Однако, хорошо известно, что если, например слева от точки разрыва функция F возрастающая, а справа – убывающая, то возможна бистабильность [26]. В отображениях с перекрытиями («overlapping maps» [26]) динамика гораздо сложнее, связанная с мультистабильностью, как и в многомерных системах (см., например, [35–38] и цитируемую там литературу).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
2. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
3. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976.
4. *Hale J.K., Koçak H.* Dynamics and Bifurcations. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
5. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
7. *Arnold V.I.* Small denominators. I. Mappings of the circumference onto itself // Am. Math. Soc. Transl. Ser. II. 1965. Vol. 46. P. 213–284.
8. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // Chaos. 1991. Vol. 1. No. 1. P. 20–24.

9. *Glass L.* Cardiac arrhythmias and circle maps—A classical problem // *Chaos*. 1991. Vol. 1. No. 1. P. 13–19.
10. *Keener J.P.* On cardiac arrhythmias: AV conduction block // *J. Math. Biol.* 1981. Vol. 12. P. 215–225.
11. *Borbély A.A., Daan S., Wirz-Justice A., Deboer T.* The two-process model of sleep regulation: a reappraisal // *J. Sleep Res.* 2016. Vol. 25. P. 131–143.
12. *Bailey M.P., Derks G., Skeldon A.C.* Circle maps with gaps: Understanding the dynamics of the two-process model for sleep-wake regulation // *Eur. J. Appl. Math.* 2018. Vol. 29. P. 845–868.
13. *Derks G., Glendinning P.A., Skeldon A.C.* Creation of discontinuities in circle maps // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2021. Vol. 477. P. 20200872.
14. *Şayli M., Skeldon A.C., Thul R., Nicks R., Coombes S.* The two-process model for sleep-wake regulation: A nonsmooth dynamics perspective // *Physica D*. 2023. Vol. 444. P. 133595.
15. *Bressloff P.C., Stark J.* Neuronal dynamics based on discontinuous circle maps // *Phys. Lett. A*. 1990. Vol. 150. No. 3,4. P. 187–195.
16. *Coombes S., Thul R., Wedgwood K.C.A.* Nonsmooth dynamics in spiking neuron // *Physica D*. 2012. Vol. 241. P. 2042–2057.
17. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Physical Review E*. 2002. Vol. 65. No. 4. P. 041922.
18. *Izhikevich E.M.* *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2007.
19. *Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2018. Т. 26. № 4–5. С. 5–58.
20. *Shilnikov A.L., Rulkov N.F.* Subthreshold oscillations in a map-based neuron model // *Phys. Lett. A*. 2004. Vol. 328. P. 177–184.
21. *Courbage M., Nekorkin V.I., Vdovin L.V.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // *Chaos*. 2007. Vol. 17. No. 4. P. 043109.
22. *Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Rubanov V.G., Bushuev D.A.* Complex dynamics of a vibration machine caused by a relay feedback control // *Physica D*. 2021. Vol. 420. P. 32870.
23. *Bi Q.S., Chen X.K., Kurths J., Zhang Zh.* Nonlinear behaviors as well as the mechanism in a piecewise-linear dynamical system with two time scales // *Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 85. P. 2233–2245.
24. *Bi Q.S., Zhang Zh.* Bursting phenomena as well as the bifurcation mechanism in controlled Lorenz oscillator with two time scales // *Phys. Lett. A*. 2011. Vol. 375. P. 1183–1190.
25. *Turaev D.V., Shilnikov L.P.* Blue sky catastrophes // *Dokl. Math.* 1995. No. 51. P. 404–407.
26. *Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F.* *Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures*. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2019.

27. *Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Kucherov A.S., Haroun R., El Aroudi A.* Period adding with symmetry breaking/recovering in a power inverter with hysteresis control // *Physica D.* 2023. Vol. 444. P. 133600.
28. *Nordmark A.* Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator // *J. Sound Vibrat.* 1991. Vol. 145. No. 2. P. 279–297.
29. *Chin W., Ott E., Nusse H. E., Grebogi C.* Grazing bifurcations in impact oscillators // *Physical Review E.* 1994. Vol. 50. No. 6. P. 4427–4444.
30. *Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E.* Local Analysis of C-bifurcations in n -Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1999. Vol. 19. No. 11. P. 1881–1908.
31. *Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P.* Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008.
32. *Keener J.P.* Chaotic behavior in piecewise continuous difference equations // *Trans. Am. Math. Soc.* 1980. Vol. 261. No. 2. P. 589–604.
33. *Kaneko K.* On the period-adding phenomena at the frequency locking in a one-dimensional mapping // *Prog. Theor. Phys.* 1982. Vol. 68. No. 2. P. 669–672.
34. De Melo W., Van Strien S. *One-Dimensional Dynamics.* New York: Springer, 1993.
35. *Dudkowski D., Czolczyński K., Kapitaniak T.* Multistability and synchronization: The co-existence of synchronous patterns in coupled pendula // *Mechanical Systems and Signal Processing.* 2022. Vol. 16. P. 108446.
36. *Zhen Su Zh., Kurths J., Liu Y., Yanchuk S.* Extreme multistability in symmetrically coupled clocks // *Chaos.* 2023. Vol. 33. P. 083157.
37. *Kuznetsov N., Mokaev T., Ponomarenko V., Seleznev E., Stankevich N., Chua L.* Hidden attractors in Chua circuit: mathematical theory meets physical experiments // *Nonlinear Dynamics.* 2023. Vol. 111. P. 5859–5887.
38. *Zhusubalyev Zh.T., Mosekilde E.* Multistability and hidden attractors in a multilevel DC/DC converter // *Math. Comput. Simulat.* 2015. Vol. 109. P. 32–45.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 22.06.2023

После доработки 26.02.2024

Принята к публикации 04.03.2024

Стохастические системы

© 2024 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук, профессор (vlkhats@mail.ru)
(Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина, Воронеж)

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СТАЦИОНАРНОГО НЕЧЕТКО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В данной работе изучены стационарные случайные процессы с нечеткими состояниями. Установлены свойства их числовых характеристик – нечетких ожиданий, ожиданий и ковариационных функций. Обосновано спектральное представление ковариационной функции – обобщенная теорема Винера–Хинчина. Основное внимание уделено задаче о преобразовании стационарного нечетко случайного процесса (сигнала) линейной динамической системой. Получены формулы, связывающие нечеткие ожидания (и ожидания) входных и выходных стационарных нечетко случайных процессов. Разработан и обоснован алгоритм вычисления ковариационной функции стационарного нечетко случайного процесса на выходе линейной динамической системы по ковариационной функции стационарного входного нечетко случайного процесса. Полученные результаты опираются на свойства нечетко случайных величин и числовых случайных процессов. В качестве примеров рассмотрены треугольные нечетко случайные процессы.

Ключевые слова: стационарные случайные процессы, нечеткие состояния, нечеткие ожидания, ковариационные функции, преобразование нечетко случайного процесса линейной динамической системой.

DOI: 10.31857/S0005231024040063, **EDN:** ZGLBSF

1. Введение

В данной работе изучаются непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями (нечетко случайные процессы). А именно время и множество возможных нечетких состояний считаются непрерывными. При этом сечение непрерывного нечетко случайного процесса в любой момент времени представляет собой нечетко случайную величину. В предлагаемом исследовании применяются известные результаты по нечеткому моделированию [1, 2], теории нечетко случайных величин [3–5] и классические результаты теории вещественных случайных процессов [6, 7].

Настоящая работа продолжает исследования по теории непрерывных случайных процессов с нечеткими состояниями, начатые автором в [8], в которой изучены свойства нечетких ожиданий, ожиданий и ковариационных функций непрерывных нечетко случайных процессов, а также с помощью метода

функции Грина исследована задача о взаимосвязи характеристик нечетко случайных сигналов на входе и выходе линейной динамической системы.

В представленной работе введены и исследованы стационарные нечетко случайные процессы, в частности, получено спектральное представление ковариационной функции – обобщенная теорема Винера–Хинчина. На базе этой теоремы предложен и обоснован алгоритм вычисления характеристик стационарного нечетко случайного процесса (сигнала) на выходе линейной динамической системы, а именно – нечеткого ожидания, ожидания и ковариационной функции по соответствующим характеристикам входного нечетко случайного процесса (сигнала). Полученные в этой области результаты являются развитием на случай нечеткости известных [6, гл. 7; 7, гл. VII] для вещественных непрерывных случайных процессов.

Подчеркнем отличие подхода и результатов данной работы от исследований, посвященных случайным процессам с непрерывным временем и дискретными нечеткими состояниями. Например, в [9–12] обсуждаются нечеткие системы массового обслуживания, а в [13, 14] рассматриваются стохастические нечеткие динамические системы автоматического регулирования. При этом в упомянутых работах стационарные нечетко случайные процессы и их ковариационные функции не обсуждаются.

Ниже под нечетким числом \tilde{z} , заданным на универсальном пространстве R – вещественных чисел, понимается совокупность упорядоченных пар $(x, \mu_{\tilde{z}}(x))$, где функция принадлежности $\mu_{\tilde{z}} : R \rightarrow [0, 1]$, определяет степень принадлежности $\forall x \in R$ множеству \tilde{z} [1, гл. 5]. В данной работе используется интервальное представление нечетких чисел [1, гл. 5] При этом множество α -уровня нечеткого числа \tilde{z} с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяется соотношением $Z_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}$ ($\alpha \in (0, 1]$), $Z_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\}$, где cl – обозначает замыкание множества.

Будем считать, что все α -уровни нечеткого числа – замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Таким образом, $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$, где $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ – левый и соответственно правый α -индексы нечеткого числа.

Ниже будем рассматривать совокупность нечетких чисел J , для которых индексы $z^\pm(\alpha)$ удовлетворяют следующим стандартным условиям:

1. $z^-(\alpha) \leq z^+(\alpha)$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.
2. Функция $z^-(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.
3. Функция $z^+(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Под суммой нечетких чисел понимается нечеткое число, индексы которого являются суммами соответствующих индексов слагаемых. Умножение нечеткого числа на положительное число означает умножение индексов на это число. Умножение на отрицательное вещественное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов (при $\forall \alpha \in [0, 1]$).

Вещественное число r ассоциируется с нечетким числом, левый и правый α -индексы которого при $\forall \alpha \in [0, 1]$ совпадают с r .

2. Нечеткие ожидания, ожидания и ковариации нечетко случайных величин

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, где Ω – множество элементарных событий, Σ – σ -алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω , P – вероятностная мера. Рассмотрим отображение $\tilde{X} : \Omega \rightarrow J$. Его интервалы α -уровня $X_\alpha(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ определяются формулами $X_\alpha(\omega) = \{r \in R : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) \geq \alpha\}$ $\alpha \in (0, 1]$, $X_0(\omega) = cl\{\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) > 0\}$, где $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r)$ – функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega, \alpha), X^+(\omega, \alpha)]$. Его границы $X^-(\omega, \alpha)$, $X^+(\omega, \alpha)$ называют левым и соответственно правым α -индексами для $\tilde{X}(\omega)$.

Отображение $\tilde{X} : \Omega \rightarrow J$ называют нечетко случайной величиной (Н.С.В.) (см., напр., [3, 4]), если вещественнозначные функции $X^\pm(\omega, \alpha)$ измеримы по ω для $\forall \alpha \in [0, 1]$. В этом случае α -индексы являются вещественными случайными величинами при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

В дальнейшем будем рассматривать класс \mathcal{X} Н.С.В., для которых индексы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ квадратично суммируемы на $\Omega \times [0, 1]$. Положим

$$(1) \quad x^-(\alpha) = EX^-(\omega, \alpha), \quad x^+(\alpha) = EX^+(\omega, \alpha).$$

Здесь и ниже символ E обозначает математическое ожидание случайной величины, т.е. для случайной величины $\xi(\omega)$ полагаем $E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dP$.

Нечеткое число с индексами, определяемыми в (1), называют нечетким ожиданием Н.С.В. \tilde{X} и обозначают $M(\tilde{X})$, а его индексы – $[M(\tilde{X})]_\alpha^\pm$.

Ожидание $m(\tilde{X})$ Н.С.В. $X \in \mathcal{X}$ определяют как среднее [15] нечеткого числа $M(\tilde{X})$ с α -индексами $M^\pm(\alpha)$, задаваемыми формулой (1)

$$(2) \quad m(\tilde{X}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left([M(\tilde{X})]^- (\alpha) + [M(\tilde{X})]^+ (\alpha) \right) d\alpha.$$

Для Н.С.В. \tilde{X} и \tilde{Y} ковариацию определяют равенством [4]

$$(3) \quad cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(cov(X_\alpha^-, Y_\alpha^-) + cov(X_\alpha^+, Y_\alpha^+) \right) d\alpha,$$

а дисперсию $D(\tilde{X}) = cov(\tilde{X}, \tilde{X})$. В (3) ковариации вещественных случайных величин X_α^\pm и Y_α^\pm задаются стандартной [16, гл. 14] формулой $cov(X_\alpha^\pm, Y_\alpha^\pm) = E(X_\alpha^\pm - E(X_\alpha^\pm))(Y_\alpha^\pm - E(Y_\alpha^\pm))$.

Свойства нечетких ожиданий, ожиданий, ковариаций и дисперсий Н.С.В. обсуждаются в [4, 5, 17, гл. 6].

3. Непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями

В этом и следующем пунктах будет использовано понятие предела, непрерывности и дифференцируемости вещественных случайных процессов в среднем квадратичном (с.к.). А именно, рассмотрим гильбертово пространство \mathcal{H} вещественных случайных величин ξ , определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , обладающих конечным вторым моментом, т.е. $E\xi^2 < \infty$. Скалярное произведение и норму в \mathcal{H} вводят равенствами $(\xi, \eta) = E\xi\eta$, $\|\eta\| = (\xi, \xi)^{\frac{1}{2}}$. Пусть $\xi(t)$ – вещественный случайный процесс, такой, что $\xi(t) \in \mathcal{H}$ при $\forall t \in [t_0, T]$. Для него понятия с.к.-непрерывности и с.к.-дифференцируемости определяются как соответствующие понятия для функций со значениями в \mathcal{H} (см. [7, гл. I]).

Пусть $[t_0, T]$ – расширенный отрезок числовой оси. Непрерывным случайным процессом с нечеткими состояниями или нечетко случайным процессом (Н.С.П.) $\tilde{X}(t)$ будем называть отображение $\tilde{X} : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{X}$, т.е. функцию $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(\omega, t)$, значениями которой при $\forall t \in [t_0, T]$ являются Н.С.В. из \mathcal{X} .

Обозначим α -индексы Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ через $X_\alpha^\pm(\omega, t)$. Ниже будем рассматривать класс Н.С.П., для которых вещественные функции $X_\alpha^\pm(\omega, t)$ квадратично суммируемы по совокупности переменных на $\Omega \times [0, 1] \times [t_0, T]$.

Определим нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t)) = M(\tilde{X}(\omega, t))$ Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ при $\forall t \in [t_0, T]$ как нечеткое ожидание (1), соответствующей Н.С.В. с α -индексами, равными

$$(4) \quad [M(\tilde{X}(t))]_\alpha^\pm = EX_\alpha^\pm(\omega, t), \quad (\forall \alpha \in [0, 1]).$$

Из свойств нечетких ожиданий Н.С.В. (см. [5, 18]) вытекает

Утверждение 1. Для нечетких ожиданий Н.С.П. справедливы свойства:

1. Для неслучайной функции $\tilde{z} : [t_0, T] \rightarrow J$ справедливо $M(\tilde{z}(t)) = \tilde{z}(t)$.
2. Если $\varphi : [t_0, T] \rightarrow R$ – неслучайный скалярный множитель, а $\tilde{X}(t)$ – Н.С.П., то $M(\varphi(t)\tilde{X}(t)) = \varphi(t)M(\tilde{X}(t))$.
3. Для Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ справедливо равенство $M(\tilde{X}(t) + \tilde{Y}(t)) = M(\tilde{X}(t)) + M(\tilde{Y}(t))$.

Ожидание Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall t \in [t_0, T]$ согласно (2) определяется формулой

$$m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left([M(\tilde{X}(t))]_\alpha^- + [M(\tilde{X}(t))]_\alpha^+ \right) d\alpha.$$

Пример 1. Пусть вещественные случайные процессы $\xi_i(\omega, t)$ ($i = 1, 2, 3$; $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$) квадратично суммируемы на $\Omega \times [t_0, T]$ и таковы, что $\xi_1(\omega, t) < \xi_2(\omega, t) < \xi_3(\omega, t)$ при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$.

Рассмотрим Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, для которого при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$ нечеткое число $\tilde{X}(\omega, t)$ имеет треугольный вид $(\xi_1(\omega, t), \xi_2(\omega, t), \xi_3(\omega, t))$, т.е. функция

принадлежности $\tilde{X}(\omega, t)$ при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$ дается формулой

$$\mu_{\omega, t}(x) = \begin{cases} \frac{x - \xi_1(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_1(\omega, t)}, & \text{если } x \in [\xi_1(\omega, t), \xi_2(\omega, t)]; \\ \frac{x - \xi_3(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_3(\omega, t)}, & \text{если } x \in [\xi_2(\omega, t), \xi_3(\omega, t)]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае α -индексы $\tilde{X}(t)$ определяются выражениями

$$(5) \quad X_{\alpha}^{-}(t) = (1 - \alpha)\xi_1(t) + \alpha\xi_2(t), \quad X_{\alpha}^{+}(t) = (1 - \alpha)\xi_3(t) + \alpha\xi_2(t).$$

Согласно (4), (5) нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ задается формулами для α -индексов

$$\begin{aligned} [M(\tilde{X}(t))]_{\alpha}^{-} &= (1 - \alpha)E\xi_1(t) + \alpha E\xi_2(t) \quad (\forall \alpha \in [0, 1]), \\ [M(\tilde{X}(t))]_{\alpha}^{+} &= (1 - \alpha)E\xi_3(t) + \alpha E\xi_2(t) \quad (\forall \alpha \in [0, 1]). \end{aligned}$$

При этом в силу (2) ожидание Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ равно

$$m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{4}(E\xi_1(t) + 2E\xi_2(t) + E\xi_3(t)).$$

Ниже рассмотрим понятие ковариационной функции Н.С.П. и ее свойства. В соответствии с (3) ковариационной функцией Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ назовем величину

$$(6) \quad K_{\tilde{X}}(t, s) = cov(\tilde{X}(t), \tilde{X}(s)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (K_{X_{\alpha}^{-}}(t, s) + K_{X_{\alpha}^{+}}(t, s)) d\alpha.$$

Здесь $K_{X_{\alpha}^{-}}(t, s)$ и $K_{X_{\alpha}^{+}}(t, s)$ – ковариационные функции вещественных случайных процессов $X_{\alpha}^{-}(t)$ и $X_{\alpha}^{+}(t)$, определяемые равенствами

$$K_{X_{\alpha}^{\pm}}(t, s) = E(X_{\alpha}^{\pm}(t) - E(X_{\alpha}^{\pm}(t)))(X_{\alpha}^{\pm}(s) - E(X_{\alpha}^{\pm}(s))).$$

Дисперсия Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ равна $D_{\tilde{X}}(t) = K_{\tilde{X}}(t, t)$.

Пример 2. Пусть выполнены условия примера 1 и дополнительно случайные процессы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ попарно некоррелированы. Тогда ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида ($\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$) выражается через ковариационные функции $K_{\xi_1}(t_1, t_2)$, $K_{\xi_2}(t_1, t_2)$, $K_{\xi_3}(t_1, t_2)$ случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ формулой

$$K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = \frac{1}{6} \{K_{\xi_1}(t_1, t_2) + 2K_{\xi_2}(t_1, t_2) + K_{\xi_3}(t_1, t_2)\}.$$

Действительно, для ковариационной функции $K_{X_{\alpha}^{-}}(t_1, t_2)$, согласно формуле (5), для левого индекса $X_{\alpha}^{-}(t)$ треугольного Н.С.П. в предположении о некоррелированности $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ получим

$$K_{X_{\alpha}^{-}}(t_1, t_2) = (1 - \alpha)^2 K_{\xi_1}(t_1, t_2) + \alpha^2 K_{\xi_2}(t_1, t_2).$$

Аналогично, с учетом некоррелированности $\xi_3(t)$ и $\xi_2(t)$ имеем

$$K_{X_{\alpha}^{+}}(t_1, t_2) = (1 - \alpha)^2 K_{\xi_3}(t_1, t_2) + \alpha^2 K_{\xi_2}(t_1, t_2).$$

Тогда по определению (6) ковариационной функции Н.С.П. получим высказанное утверждение.

Согласно (6) и свойствам ковариаций вещественных случайных процессов (см. [16, гл. 23]) имеет место

Утверждение 2. Ковариационная функция Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ обладает свойствами:

1. *Симметричность: $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2, t_1)$ при $\forall t_1, t_2 \in [t_0, T]$.*
2. *Пусть $\tilde{X}(t)$ – Н.С.П., а $\varphi(t)$ – неслучайная числовая функция. Если Н.С.П. $\tilde{Y}(t) = \varphi(t)\tilde{X}(t)$, то $K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ при $\varphi(t_1)\varphi(t_2) \geq 0$.*
3. *Если $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) + \varphi(t)$, то $K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$.*
4. *Справедливо соотношение $|K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_{\tilde{X}}(t_1)D_{\tilde{X}}(t_2)}$.*

Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ с α -интервалами $[X_{\alpha}^{-}(\omega, t), X_{\alpha}^{+}(\omega, t)]$ называют [8] непрерывным в точке t , если все его α -индексы $X_{\alpha}^{\pm}(\omega, t)$ непрерывны по t как скалярные случайные процессы в среднем квадратичном.

Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ с α -индексами $X_{\alpha}^{-}(\omega, t)$, $X_{\alpha}^{+}(\omega, t)$ называют [8] дифференцируемым в точке t (по Сеиккала), если все его α -индексы дифференцируемы по t как скалярные случайные процессы в среднем квадратичном, а производные $\frac{\partial}{\partial t}X_{\alpha}^{-}(\omega, t)$ и $\frac{\partial}{\partial t}X_{\alpha}^{+}(\omega, t)$ являются соответственно нижним и верхним α -индексами некоторой Н.С.В., называемой производной в точке t (сравни с [19] для нечеткозначной функции). В этом случае производную по t Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ будем обозначать как $\tilde{X}'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{X}(\omega, t)$.

Обычным образом последовательно определяется понятие второй и последующих производных.

Замечание 1. В силу определения производной Н.С.П. и согласно арифметическим свойствам нечетких чисел в интервальной форме операция дифференцирования Н.С.П. – линейна, т.е. производная суммы (разности) Н.С.П. равна сумме (разности) производных, а постоянный множитель может выноситься за знак производной.

Замечание 2. Производная Н.С.В. (постоянной) совпадает с нечетким числом, левые и правые α -индексы которого равны нулю при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Имеет место теорема о нечетком ожидании производной Н.С.П.

Теорема 1. Пусть Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ дифференцируем в области $t \in (t_0, T)$. Тогда определена производная от нечеткого ожидания Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ и нечеткое ожидание производной Н.С.П. равно производной от нечеткого ожидания

$$(7) \quad M\tilde{X}'(t) = (M\tilde{X}(t))'.$$

Доказательство. По определению производной Н.С.П. и нечеткого ожидания Н.С.П. можем записать

$$[M(\tilde{X}'(t))]_{\alpha}^{\pm} = E[\tilde{X}'(t)]_{\alpha}^{\pm} = E(X_{\alpha}^{\pm})'(t) = (EX_{\alpha}^{\pm}(t))'.$$

Последнее равенство следует из соответствующего свойства вещественных случайных процессов [6, гл. 6]. Тогда, используя определение производной нечеткозначной функции $M\tilde{X}(t)$ по Сеиккала [19], а также интервальный признак равенства нечетких чисел, получим (7).

Подчеркнем, что (7) представляет собой равенство нечеткозначных функций. Отметим, что теорема 1 несколько усиливает результат из [8].

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место утверждение для ожиданий от Н.С.П. для производных

$$(8) \quad m\tilde{X}'(t) = (m\tilde{X}(t))'.$$

Кроме того, справедливо следующее утверждение для ковариационной функции от производной Н.С.П.

Теорема 2 [8]. Пусть определены и непрерывны по совокупности переменных t, s, α вторые производные $\frac{\partial^2 K_{X_{\alpha}^{-}}(t, s)}{\partial t \partial s}$ и $\frac{\partial^2 K_{X_{\alpha}^{+}}(t, s)}{\partial t \partial s}$ ковариационных функций α -индексов $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ для Н.С.П. $\tilde{X}(t)$. Тогда ковариационная функция $K_{\tilde{X}'}(t, s)$ производной $\tilde{X}'(t)$ нечетко случайного процесса $\tilde{X}(t)$ задается формулой

$$(9) \quad K_{\tilde{X}'}(t, s) = \frac{\partial^2 K_{\tilde{X}}(t, s)}{\partial t \partial s}.$$

4. Стационарные нечетко случайные процессы

Как известно, вещественный случайный процесс $\xi(t)$ с $E|\xi(t)|^2 < \infty$ при $t \in [0, \infty)$ называют стационарным в широком смысле (коротко – стационарным), если он имеет постоянное математическое ожидание $E\xi(t) = a$ и ковариационную функцию $E[\xi(t) - a][\xi(s) - a] = K_{\xi}(t - s)$, зависящую лишь от разности аргументов (см. [6, гл. 7; 7, гл. VII]).

Назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$ стационарным, если его α -индексы при $\forall \alpha \in [0, 1]$ являются вещественными стационарными случайными процессами.

Пример 3. Пусть выполнены условия примера 2 и дополнительно все случайные процессы $\xi_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$; $t \in [0, \infty)$) являются стационарными. Тогда треугольный Н.С.П. $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ является стационарным.

Это следует из выражений, полученных в примерах 1, 2 для нечетких ожиданий и соответственно ковариационных функций треугольного Н.С.П. $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$.

Имеет место

Теорема 3. Пусть $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$ – стационарный Н.С.П. Тогда его нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ и ожидание $m(\tilde{X}(t))$ постоянны, а ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2 - t_1)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$.

Доказательство. Пусть $\tilde{X}(t)$ – стационарный Н.С.П. Обозначим постоянные математические ожидания α -индексов $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ через m_{α}^{\pm} . Согласно определению (3) они являются α -индексами нечеткого ожидания $M_{\alpha}^{\pm} = m_{\alpha}^{\pm}$. Тогда нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ постоянно и ожидание $m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (m_{\alpha}^{+} + m_{\alpha}^{-}) d\alpha$ – также постоянно.

Обозначим ковариационные функции α -индексов, т.е. вещественных случайных процессов $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ через $K_{X_{\alpha}^{\pm}}(t_1, t_2)$. По предположению $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ – стационарный случайный процесс, следовательно, $K_{X_{\alpha}^{\pm}}(t_1, t_2) = K_{X_{\alpha}^{\pm}}(t_2 - t_1)$. Тогда согласно определению (6) и ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$.

Кроме того, справедлива

Теорема 4. Ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ обладает свойствами:

1. Ковариационная функция является четной, т.е. $K_{\tilde{X}}(\tau) = K_{\tilde{X}}(-\tau)$.
2. Дисперсия стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ постоянна и равна $D_{\tilde{X}} = K_{\tilde{X}}(0)$.
3. Справедливо неравенство $|K_{\tilde{X}}(\tau)| \leq K_{\tilde{X}}(0)$ ($\forall \tau \in R$).

Теорема 4 следует из выполнения соответствующих свойств для ковариационных функций α -индексов $K_{X_{\alpha}^{-}}(\tau)$, $K_{X_{\alpha}^{+}}(\tau)$ (см. [16, гл. 24]) и представления (6).

Для стационарных Н.С.П. имеет место следующее уточнение теоремы 2.

Теорема 5. В условиях теоремы 2 ковариационная функция производной $\tilde{X}'(t)$ дифференцируемого стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ равна второй производной от его ковариационной функции, взятой со знаком минус: $K_{\tilde{X}'}(\tau) = -K_{\tilde{X}}''(\tau)$.

Доказательство. Согласно формуле (9) для $\forall t_1, t_2 \in [0, \infty)$ имеем

$$K_{\tilde{X}'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

По условию $\tilde{X}(t)$ – стационарный Н.С.П. Тогда по теореме 3 его ковариационная функция зависит от разности аргументов $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(\tau)$ при $\tau = t_2 - t_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} K_{\tilde{X}'}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 K_{\tilde{X}}(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial K_{\tilde{X}}(\tau)}{\partial t_2} \right) = \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial K_{\tilde{X}}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} \right) = \\ &= \frac{d^2 K_{\tilde{X}}(\tau)}{d\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = K_{\tilde{X}}''(\tau)(-1) = -K_{\tilde{X}}''(\tau). \end{aligned}$$

Здесь были учтены равенства $\frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -1$ и $\frac{\partial \tau}{\partial t_2} = 1$. Таким образом, ковариационная функция Н.С.П. $\tilde{X}'(t)$ зависит только от разности аргументов и выполнено утверждение теоремы.

Утверждение 3. Производная $\tilde{X}'(t)$ стационарного дифференцируемого Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$ является стационарным Н.С.П.

Действительно, по условию α -индексы $X_\alpha^\pm(t)$, $t \in [0, \infty)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ являются вещественными стационарными случайными процессами. Тогда в силу известного свойства вещественных стационарных процессов [6, гл. 7] и их производные $(X_\alpha^\pm)'(t)$ являются таковыми. Поэтому утверждение 3 вытекает из определения дифференцируемости Н.С.П.

Утверждение 4. Пусть $\tilde{Y}(t)$, $t \in [0, \infty)$ – стационарный k раз дифференцируемый на $(0, \infty)$ Н.С.П., а заданные постоянные $b_s \geq 0$ ($s = 0, 1, \dots, k$) не все равные нулю. Тогда линейная комбинация производных $\tilde{Z}(t) = \sum_{s=0}^k b_s \tilde{Y}^{(s)}(t)$ является стационарным Н.С.П.

Действительно, в условиях утверждения 4 левый и правый индексы $Z_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\tilde{Z}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ имеют вид

$$Z_\alpha^\pm(t) = \left[\sum_{s=0}^k b_s (\tilde{Y})^{(s)}(t) \right]_\alpha^\pm = \sum_{s=0}^k b_s (Y_\alpha^\pm(t))^{(s)}.$$

Здесь были учтены определение производных Н.С.П. и свойства арифметических операций с нечеткими числами в интервальной форме.

Поскольку $Y_\alpha^\pm(t)$ – стационарные вещественные процессы, то в силу известного результата для таких процессов [6, гл. 7] получим, что $Z_\alpha^\pm(t)$ – стационарные вещественные случайные процессы. Отсюда следует утверждение 4.

5. Спектральная плотность стационарного Н.С.П. Обобщенная теорема Винера–Хинчина

Рассмотрим задачу о спектральном представлении ковариационной функции стационарного Н.С.П.

Как известно, для вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$, определенного на бесконечном интервале времени $[0, \infty)$, имеет место [6, гл. 7; 7, гл. VII].

Лемма 1 (теорема Винера–Хинчина). Ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ и спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье

$$(10) \quad K_\xi(\tau) = \int_0^\infty S_\xi(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad S_\xi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_\xi(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Замечание 3 [7, гл. VII.] Существование спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и выполнение соотношений (10) обеспечивается, например, непрерывностью ковариационной функции $K_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$ и ее суммируемостью на $(0, \infty)$ (т.е. $\int_0^\infty |K_\xi(\tau)| d\tau < \infty$).

Приведем обобщение леммы 1 на случай стационарных Н.С.П. Пусть стационарный Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, заданный на $[0, \infty)$, имеет α -индексы $X_\alpha^\pm(t)$ и пусть $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ – спектральные плотности стационарных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ ($\forall \alpha \in [0, 1]$), причем функции $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ суммируемы по α на $[0, 1]$. Спектральной плотностью стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ назовем функцию

$$(11) \quad S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 (S_{X_\alpha^+}(\omega) + S_{X_\alpha^-}(\omega)) d\alpha.$$

Пример 4. Пусть выполнены условия примера 3. Обозначим через $S_{\xi_i}(\omega)$ спектральные плотности вещественных стационарных случайных процессов $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда спектральная плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ описывается формулой

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{6} (S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)).$$

Действительно, обозначим ковариационные функции вещественных случайных процессов $\xi_i(t)$ через $K_{\xi_i}(\tau)$. Согласно (5) и в силу предположения о попарной некоррелированности случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ для ковариационных функций α -индексов $X_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ можем записать

$$\begin{aligned} K_{X_\alpha^-}(\tau) &= (1 - \alpha)^2 K_{\xi_1}(\tau) + \alpha^2 K_{\xi_2}(\tau), \\ K_{X_\alpha^+}(\tau) &= (1 - \alpha)^2 K_{\xi_3}(\tau) + \alpha^2 K_{\xi_2}(\tau). \end{aligned}$$

Тогда на основании формул (10) для спектральных плотностей вещественных стационарных случайных процессов X_α^\pm получим

$$\begin{aligned} S_{X_\alpha^-}(\omega) &= (1 - \alpha)^2 S_{\xi_1}(\omega) + \alpha^2 S_{\xi_2}(\omega), \\ S_{X_\alpha^+}(\omega) &= (1 - \alpha)^2 S_{\xi_3}(\omega) + \alpha^2 S_{\xi_2}(\omega). \end{aligned}$$

Поэтому в соответствии с (11) спектральная плотность Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ характеризуется формулой

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha S_{\xi_1}(\omega) + \int_0^1 \alpha^2 d\alpha S_{\xi_2}(\omega) + \int_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha S_{\xi_3}(\omega) + \int_0^1 \alpha^2 d\alpha S_{\xi_2}(\omega) \right) = \frac{1}{6} (S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)),$$

которая влечет утверждение 4.

Отметим, что по определению (11) и в силу свойств спектральных плотностей вещественных стационарных случайных процессов (см. [16, гл. 24]) справедливо

Утверждение 5. Выполнены следующие свойства спектральной плотности стационарного Н.С.П.:

1. Спектральная плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ неотрицательна, т.е. $S_{\tilde{X}}(\omega) \geq 0$.

2. Интеграл от спектральной плотности стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ в пределах от нуля до бесконечности равен дисперсии Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, т.е. $\int_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega) d\omega = D_{\tilde{X}}$.

Целесообразность данного выше определения (11) подтверждается установленной ниже обобщенной теоремой Винера–Хинчина.

Теорема 6. Пусть $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$ – стационарный Н.С.П. и для его α -индексов $X_\alpha^\pm(t)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$ определены ковариационная функция $K_{X_\alpha^\pm}(\tau)$ и спектральная плотность $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$, причем они суммируемы по совокупности переменных на $[0, \infty) \times [0, 1]$. Тогда ковариационная функция и спектральная плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье:

$$(12) \quad K_{\tilde{X}}(\tau) = \int_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_{\tilde{X}}(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Доказательство. Покажем первую из формул (12). Для стационарных вещественных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ по лемме 1 имеем $K_{X_\alpha^-}(\tau) = \int_0^\infty S_{X_\alpha^-}(\omega) \cos \omega \tau d\omega$ и $K_{X_\alpha^+}(\tau) = \int_0^\infty S_{X_\alpha^+}(\omega) \cos \omega \tau d\omega$. Сложим обе части этих равенств, а затем проинтегрируем полученные результаты по α от 0 до 1. Тогда $\int_0^1 (K_{X_\alpha^-}(\tau) + K_{X_\alpha^+}(\tau)) d\alpha = \int_0^1 \int_0^\infty (S_{X_\alpha^-}(\omega) + S_{X_\alpha^+}(\omega)) \cos \omega \tau d\omega d\alpha$. Меняя в правой части порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и используя (6), (11), установим формулу для $K_{\tilde{X}}(\tau)$.

Кроме того, по лемме 1 $S_{X_{\alpha}^{\pm}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{X_{\alpha}^{\pm}}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$. Откуда, аналогично предыдущему, с учетом (6), (11) следует вторая из формул (12).

Пример 5. Пусть выполнены условия примера 4. Тогда в силу теоремы 6 и согласно примеру 4 ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t)$ треугольного стационарного нечетко случайного процесса $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ дается формулой

$$\begin{aligned} K_{\tilde{X}}(\tau) &= \frac{1}{6} \int_0^{\infty} (S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \frac{1}{6} \{K_{\xi_1}(\tau) + 2K_{\xi_2}(\tau) + K_{\xi_3}(\tau)\}, \end{aligned}$$

где $K_{\xi_i}(\tau)$ – ковариационные функции вещественных стационарных случайных процессов $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$).

Отметим, что этот результат соответствует примеру 2.

6. О преобразовании стационарного Н.С.П. линейной динамической стационарной системой

Пусть на вход некоторого устройства поступает случайный сигнал $\xi(t)$, а на выходе наблюдается случайный сигнал $\eta(t)$. Устройство называется стационарной линейной динамической системой n -го порядка, если связь выхода $\eta(t)$ со входом $\xi(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} (13) \quad a_n \eta^{(n)}(t) + a_{n-1} \eta^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \\ = b_k \xi^{(k)}(t) + b_{k-1} \xi^{(k-1)}(t) + \dots + b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t) \quad (t > 0). \end{aligned}$$

Здесь a_j ($j = 0, 1, \dots, n$) и b_s ($s = 0, 1, \dots, k$) – вещественные числа, причем $k < n$.

Если динамическая система (13) асимптотически устойчива, а на ее вход поступает вещественный стационарный случайный процесс $\xi(t)$, то при достаточно больших значениях t , т.е. по окончании некоторого переходного периода, случайный процесс $\eta(t)$ на выходе можно считать стационарным. В литературе широко известна задача (см. [6, гл. 7]) об установлении связи между числовыми характеристиками (математическими ожиданиями и соответственно ковариационными функциями) входного и выходного вещественных стационарных случайных сигналов динамической системы (13).

Ниже предполагается, что на вход динамической системы (13) поступает стационарный Н.С.П. $\check{Y}(t)$, а на выходе наблюдается стационарный Н.С.П. $\check{X}(t)$.

Требуется по известным характеристикам стационарного Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ на входе вычислить характеристики стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы (13).

Рассмотрим задачу о вычислении постоянного нечеткого ожидания $M\tilde{X}$ (и ожидания $m\tilde{X}$) на выходе системы (13) по известному постоянному нечеткому ожиданию $M\tilde{Y}$ (либо ожиданию $m\tilde{Y}$) на входе.

Утверждение 6. Пусть на вход динамической системы (13) поступает стационарный непрерывно дифференцируемый k раз Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$, $t \in [0, \infty)$, а на выходе наблюдается стационарный непрерывно дифференцируемый n раз Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$. Тогда справедливы соотношения

$$M\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0}M\tilde{Y}, \quad m\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0}m\tilde{Y}.$$

Действительно, по условию имеет место следующее равенство:

$$(14) \quad a_n\tilde{X}^{(n)}(t) + a_{n-1}\tilde{X}^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\tilde{X}'(t) + a_0\tilde{X}(t) = \\ = b_k\tilde{Y}^{(k)}(t) + b_{k-1}\tilde{Y}^{(k-1)}(t) + \dots + b_1\tilde{Y}'(t) + b_0\tilde{Y}(t) \quad (t > 0).$$

Приравняем нечеткое ожидание левой и правой частей равенства (14). Тогда, используя алгебраические свойства нечетких ожиданий (утверждение 1) и свойства производной от нечеткого ожидания (теорема 1), получим

$$(15) \quad a_n(M\tilde{X})^{(n)}(t) + a_{n-1}(M\tilde{X})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(M\tilde{X})'(t) + a_0M\tilde{X}(t) = \\ = b_k(M\tilde{Y})^{(k)}(t) + b_{k-1}(M\tilde{Y})^{(k-1)}(t) + \dots + b_1(M\tilde{Y})'(t) + b_0M\tilde{Y}(t).$$

Так как нечеткие ожидания стационарных Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ и $\tilde{X}(t)$ постоянны, то в соответствии с замечанием 2 их производные любого порядка равны нечеткому числу, все левые и правые индексы которого равны нулю. Тогда (15) влечет равенство

$$a_0M\tilde{X} = b_0M\tilde{Y},$$

откуда $M\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0}M\tilde{Y}$. Аналогично для ожиданий $m\tilde{X} = \frac{b_0}{a_0}m\tilde{Y}$.

Далее по известной ковариационной функции $K_{\tilde{Y}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ на входе динамической системы (14) найдем ковариационную функцию $K_{\tilde{X}}(\tau)$ и дисперсию $D_{\tilde{X}}$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе.

Имеет место

Теорема 7. Пусть коэффициенты динамической системы (14) неотрицательны, т. е. $a_j \geq 0$ ($j = 0, 1, \dots, n$), $b_s \geq 0$ ($s = 0, 1, \dots, k$). Пусть на вход динамической системы (14) поступает непрерывно дифференцируемый k раз Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$, $t \in [0, \infty)$, причем для α -индексов $Y_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$ определены ковариационные функции $K_{Y_\alpha^\pm}(\tau)$ и спектральные плотности $S_{Y_\alpha^\pm}(\omega)$, суммируемые по совокупности переменных на $[0, \infty) \times [0, 1]$.

Пусть на выходе динамической системы (14) наблюдается непрерывно дифференцируемый n раз Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, $t \in [0, \infty)$. Тогда алгоритм вычислений (в действительной форме) ковариационной функции $K_{\tilde{X}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы (14) состоит из следующих этапов:

1) по ковариационной функции $K_{\tilde{Y}}(\tau)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ на входе динамической системы (14) вычислим его спектральную плотность $S_{\tilde{Y}}(\omega)$ по обобщенной формуле Винера–Хинчина (12)

$$(16) \quad S_{\tilde{Y}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\tilde{Y}}(\tau) \cos \omega \tau d\tau;$$

2) по данному дифференциальному уравнению (14) найдем частотную характеристику $\Phi(i\omega)$:

$$(17) \quad \Phi(i\omega) = \frac{b_k(i\omega)^k + \dots + b_1(i\omega) + b_0}{a_n(i\omega)^n + \dots + a_1(i\omega) + a_0},$$

где i – мнимая единица;

3) по спектральной плотности $S_{\tilde{Y}}(\omega)$ на входе системы (16) и квадрату модуля частотной характеристики (17) $|\Phi(i\omega)|^2$ найдем спектральную плотность $S_{\tilde{X}}(\omega)$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе системы:

$$(18) \quad S_{\tilde{X}}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_{\tilde{Y}}(\omega);$$

4) по спектральной плотности $S_{\tilde{X}}(\omega)$ (18) на выходе системы вычислим ковариационную функцию $K_{\tilde{X}}(\tau)$ и (или) дисперсию $D_{\tilde{X}}$ стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе системы согласно обобщенной формуле Винера–Хинчина (12):

$$(19) \quad K_{\tilde{X}}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\tilde{X}}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad D_{\tilde{X}} = \int_0^{\infty} S_{\tilde{X}}(\omega) d\omega.$$

Доказательство. Для α -индексов $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ и $Y_{\alpha}^{\pm}(t)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ в силу уравнения (14) для $\forall \alpha \in [0, 1]$ согласно определению производных Н.С.П. и на основании предположения о положительности числовых коэффициентов a_k, b_s , а также определения сложения нечетких чисел в интервальном виде, имеем

$$(20) \quad a_n(X_{\alpha}^{\pm})^{(n)}(t) + a_{n-1}(X_{\alpha}^{\pm})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(X_{\alpha}^{\pm})'(t) + a_0 X_{\alpha}^{\pm}(t) = \\ = b_k(Y_{\alpha}^{\pm})^{(k)}(t) + b_{k-1}(Y_{\alpha}^{\pm})^{(k-1)}(t) + \dots + b_1(Y_{\alpha}^{\pm})'(t) + b_0 Y_{\alpha}^{\pm}(t) \quad (t > 0).$$

По условию теоремы α -индексы $Y_{\alpha}^{\pm}(t)$ и $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ являются вещественными стационарными случайными процессами при $t \in [0, \infty)$. Далее для каждой

пары вещественных стационарных случайных процессов $Y_\alpha^\pm(t)$ и $X_\alpha^\pm(t)$, связанных между собой динамической системой (20), применяется известный алгоритм вычислений (см. [6, гл. 7], состоящий из пунктов 1)–4).

А именно, сначала для любого $\alpha \in [0, 1]$ по ковариационной функции $K_{Y_\alpha^\pm}(\tau)$ случайного процесса $Y_\alpha^\pm(t)$ на входе динамической системы (20) в соответствии с (10) вычисляется его спектральная плотность $S_{Y_\alpha^\pm}(\omega)$

$$S_{Y_\alpha^\pm}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_{Y_\alpha^\pm}(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Затем, используя частотную характеристику $\Phi(i\omega)$, определяются спектральные плотности стационарных вещественных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ на выходе по формулам

$$S_{X_\alpha^\pm}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_{Y_\alpha^\pm}(\omega).$$

Отсюда, в силу (11), следует (18).

Далее находятся ковариационные функции

$$K_{X_\alpha^\pm}(\tau) = \int_0^\infty S_{X_\alpha^\pm}(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

вещественных стационарных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ на выходе динамической системы (20).

После этого применяются данные выше определения ковариационной функции (6) и спектральной плотности (11) стационарных Н.С.П.

$$\begin{aligned} K_{\tilde{X}}(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (K_{X_\alpha^-}(\tau) + K_{X_\alpha^+}(\tau)) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^\infty (S_{X_\alpha^+}(\omega) + S_{X_\alpha^-}(\omega)) \cos \omega\tau d\omega \right) d\alpha. \end{aligned}$$

Меняя здесь порядок интегрирования на основании теоремы Фубини, получим

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (S_{X_\alpha^+}(\omega) + S_{X_\alpha^-}(\omega)) d\alpha \right) \cos \omega\tau d\omega = \int_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

Таким образом, установлена первая из формул (19). Формула для дисперсии $D_{\tilde{X}}$ следует из установленной, поскольку $D_{\tilde{X}} = K_{\tilde{X}}(0)$.

Замечание 4. Уравнение (20) можно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве \mathcal{H} случайных величин с конечным вторым моментом. Если выполнено условие отрицательности вещественных частей всех корней характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, то уравнение (20) асимптотически устойчиво по Ляпунову в \mathcal{H} (см. [21, гл. II]).

Замечание 5. Уравнение (15) по существу – нечетко дифференциальное уравнение. По поводу таких уравнений см. [19, 22]. Уравнение (14) представляет собой нечетко случайное уравнение. Такие уравнения рассмотрены в [23–25].

Пример 6. Пусть на вход линейной динамической системы (13) поступает Н.С.П. треугольного вида $\tilde{Y}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, причем вещественные случайные процессы $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям примера 4. Тогда, согласно примеру 3, Н.С.П. $\tilde{Y}(t)$ является стационарным. При этом в силу примера 2 его ковариационная функция $K_{\tilde{Y}}(\tau)$ имеет вид

$$K_{\tilde{Y}}(\tau) = \frac{1}{6} \{K_{\xi_1}(\tau) + 2K_{\xi_2}(\tau) + K_{\xi_3}(\tau)\},$$

где $K_{\xi_i}(\tau)$ – ковариационные функции вещественных случайных процессов $\xi_i(t)$.

Кроме того, согласно примеру 4, спектральная плотность стационарного треугольного Н.С.П. $\tilde{Y}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))S_{\tilde{Y}}(\omega)$ на входе динамической системы (13) выражается формулой

$$S_{\tilde{Y}}(\omega) = \frac{1}{6} (S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)),$$

где $S_{\xi_i}(\omega)$ – спектральные плотности вещественных случайных процессов $\xi_i(t)$.

Далее, на основании теоремы 7, определим спектральную плотность стационарного Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы (13), равную

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_{\tilde{Y}}(\omega) = \frac{1}{6} |\Phi(i\omega)|^2 \{S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)\},$$

где $\Phi(i\omega)$ – частотная характеристика системы (13). Тогда по теореме 7 ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(\tau)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ на выходе динамической системы имеет вид

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 (S_{\xi_1}(\omega) + 2S_{\xi_2}(\omega) + S_{\xi_3}(\omega)) \cos \omega \tau d\omega.$$

7. Заключение

Существенное содержание и научную новизну данной работы составляют теоремы 3–7, а также утверждения 3–6. Подчеркнем значимость введенного

в данной статье понятия спектральной плотности стационарного Н.С.П. (теорема 6), а также алгоритма определения ковариационной функции стационарного Н.С.П. на выходе динамической системы по ковариационной функции стационарного Н.С.П. на входе (теорема 7). Примеры 1–6 показывают возможность применения развитой теории к треугольным Н.С.П.

Результаты настоящей работы допускают развитие в следующих направлениях:

1. Они сохраняют силу, если вместо определения (3) ковариации нечетко случайных величин использовать определение ковариации из [5].

2. Как известно [7], теорема Винера–Хинчина для числовых случайных процессов (лемма 1) допускает запись в более общем виде, когда рассматривается не функция спектральной плотности, а функция спектрального распределения и вместо интеграла Римана используется интеграл Римана–Стилтьеса.

Обобщенная теорема Винера–Хинчина (теорема 6) допускает развитие в этом направлении для стационарных нечетко случайных процессов.

3. Возможно обобщение некоторых результатов настоящей работы на случай использования обобщенных нечетких чисел (см. [26]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986. 312 с.
2. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ, 2015. 798 с.
3. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Fuzzy random variables // *J. Math. Anal. Appl.* 1978. V. 64. P. 409–422.
4. *Feng Y., Hu L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables // *Fuzzy Sets Syst.* 2001. V. 120, I. 2. P. 487–497.
[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00060-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3)
5. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко случайных величин // *Прикладная эконометрика.* 2016. № 42. С. 121–138.
6. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус, 2016. 439 с.
7. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 400 с.
8. *Хацкевич В.Л.* О непрерывных случайных процессах с нечеткими состояниями // *А и Т.* 2023. № 7. С. 23–40.
9. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Марковские процессы с нечеткими состояниями // *Информационные технологии.* 2020. Т. 26. № 6. С. 323–334.
10. *Вилков В.Б., Кальницкий В.С., Молоков И.Е.* Нечеткие системы массового обслуживания: монография. СПб.: Астерион, 2022. 184 с.
11. *Zaki N.H.M., Saliman A.N., Abdullah N.A., et al.* Comparison of Queuing Performance Using Queuing Theory Model and Fuzzy Queuing Model at Check-in Counter in Airport // *Math. Stat.* 2019. No. 7(4A). P. 17–23.
<https://doi.org/10.13189/ms.2019.070703>

12. *Usha Prameela K., Wurmbrand R., Jayakar R.P.S.* An Interpretation of Non-Preemptive Priority Fuzzy Queuing Model with Asymmetrical Service Rates // Pak. J. Stat. Oper. Res. 2021. V. 17. No. 4. P. 791–797.
<https://doi.org/10.18187/pjsor.v17i4.3878>
13. *Liu Y., Zhu Q., Fan X.* Event-Triggered Adaptive Fuzzy Control for Stochastic Nonlinear Time-delay Systems // Fuzzy Sets Syst. 2023. V. 452. I. C. P. 42–60.
<https://doi.org/10.1007/s11071-021-06633-7>
14. *Shen H., Wu J., Li F., Chen X., Wang J.* Fuzzy multi-objective fault-tolerant control for nonlinear Markov jump singularly perturbed systems with persistent dwell-time switched transition probabilities // Fuzzy Sets Syst. 2023. V. 452. I. C. P. 131–148.
<https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.03.020>
15. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy Sets Syst. 1987. V. 24. No. 3. P. 279–300.
16. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк. 2003. 479 с.
17. *Язенин А.В.* Основные понятия теории возможностей. М.: Физматлит, 2016. 144 с.
18. *Хацкевич В.Л.* О некоторых свойствах нечетких ожиданий и нелинейных нечетких ожиданий нечетко случайных величин // Известия вузов. Математика. 2022. № 11. С. 97–109. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-11-97-109>
19. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets Syst. 1987. V. 24. No. 3. P. 319–330.
20. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. No. 2. P. 552–558.
21. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.
22. *Kaleva. O.* A note on fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2006. Vol. 64, no. 5. P. 895–900.
23. *Feng Y.* Fuzzy stochastic differential systems // Fuzzy Sets Syst. Int. J. Inform. Sci. Engin. 2000. V. 115. No. 3. P. 351–363.
24. *Malinowski M.T.* Existence theorems for solutions to random fuzzy differential equations // Nonlin. Anal. Theor. Method. Appl. 2010. V. 73. No. 6. P. 1515–1532.
25. *Chen X., Qin X.* A new existence and uniqueness theorem for fuzzy differential equations // Int. J. Fuzzy Syst. 2013. V. 13. No. 2. P. 148–151.
26. *Shvedov A.S.* Instrumental variables estimation of fuzzy regression models // J. Intelligent and Fuzzy Systems, 2019. V. 36. No. 6. P. 5457–5462.
<https://doi.org/10.3233/JIFS-181327>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 01.08.2023

После доработки 01.03.2024

Принята к публикации 04.03.2024

Управление в технических системах

© 2024 г. Д.Д. ЯПАРОВ (iaparovdd@susu.ru),
А.Л. ШЕСТАКОВ, д-р техн. наук (president@susu.ru)
(Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск)

САМОРЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ МЕТОД ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ¹

Рассматривается динамическая измерительная система. Предлагается новая модель измерительной системы, метод обработки результатов измерений и метод восстановления входного сигнала системы по зашумленному выходному. Приведены оценка точности метода и вычислительный эксперимент, демонстрирующий эффективность метода восстановления сигнала.

Ключевые слова: обработка результатов измерений, динамические измерения, саморегуляризация, восстановление сигнала.

DOI: 10.31857/S0005231024040073, **EDN:** ZGBRRO

1. Введение

Эффективность технологических процессов напрямую связана с обеспечением оптимальности параметров систем управления процессом. Точность контроля соблюдения и оптимизация параметров зависят от точности обработки данных о состоянии системы. В быстропротекающих энергоемких технологических процессах состояние системы изменяется в течение короткого промежутка времени. В силу зашумленности выходного сигнала и инерционности измерительной системы для отражения ее истинного состояния необходимо располагать информацией о входном сигнале. Другим фактором, оказывающим существенное влияние на точность обработки данных о состоянии системы, является зашумленность выходного сигнала. Проблема зашумленности в сочетании с инерционностью измерительной системы становится особенно острой при обработке динамических измерений, выполненных в малый промежуток времени, когда даже небольшой шум в исходных данных приводит к существенному искажению результатов их обработки. Проблеме обработки зашумленных динамических сигналов посвящены работы многих исследователей. Среди работ, посвященных этой области исследования, выделим подход, базирующийся на использовании теории управления [1]. В этой

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание на выполнение фундаментальных научных исследований № FENU-2023-0010 (2023010ГЗ)).

работе предлагается модель измерительной системы с модальным управлением динамическими характеристиками, а в [2] предложен ряд способов коррекции динамической погрешности, основанных на применении теории автоматического управления. Другой подход к обработке зашумленных динамических измерений заключается в создании инженерных решений. К этой области исследований относятся следующие работы В.А Грановского [3, 4], где предлагается использовать испытательные сигналы для коррекции шума в динамических измерениях; работа S. Engelberg [5], где предполагается введение дополнительных фильтров для уменьшения негативного влияния шумов, а также [6], посвящена новому подходу к сбору данных. Отдельное направление исследований обработки зашумленных динамических сигналов связано с использованием теории и методов решения обратных задач. К этому направлению относятся работы Г.Н Солопченко [7–9], где предлагается использовать методы регуляризации А.Н. Тихонова в области динамических измерений, работа А.Ф Верланы [10], где задача обработки зашумленной информации сводится к решению уравнений Фредгольма первого рода, а также работа А. Forbes [11], где проблема обработки динамических измерений представлена обратной задачей, решаемой путем использования гауссовых процессов. В данной статье предложен метод обработки зашумленных динамических измерений, обладающий эффектом саморегуляризации и не требующий значительной перенастройки параметров измерительной системы.

2. Модель измерительной системы с обратными связями

Измерительные системы имеют на входе первичный измерительный преобразователь (датчик), поэтому входной сигнал $U(t)$ недоступен для непосредственного измерения. В силу инерционности измерительной системы для получения информации об истинном состоянии системы возникает необходимость в восстановлении входного сигнала $U(t)$ по выходному сигналу датчика. Один из методов восстановления входного сигнала был предложен в [12] и включает модель измерительной системы с обратными связями. Структурная модель этой системы представлена на рис. 1.

В этой модели выделяют несколько групп коэффициентов. К первой группе относятся коэффициенты a_i , связанные с выходным сигналом, ко второй – коэффициенты b_j , связанные с входным сигналом. К следующей группе относятся коэффициенты d_j , являющиеся характеристиками фильтров. Эти характеристики настраиваются пользователем в зависимости от характера шума входного сигнала. К последней группе относятся k_i , являющиеся коэффициентами обратных связей и предназначенные для корректировки значений динамической погрешности.

Существенная трудность использования модели с обратными связями заключается в том, что при изменении уровня зашумленности выходного сигнала возникает необходимость в корректировке всех динамических характеристик измерительной системы, когда для коэффициентов k_i и d_j необходимо

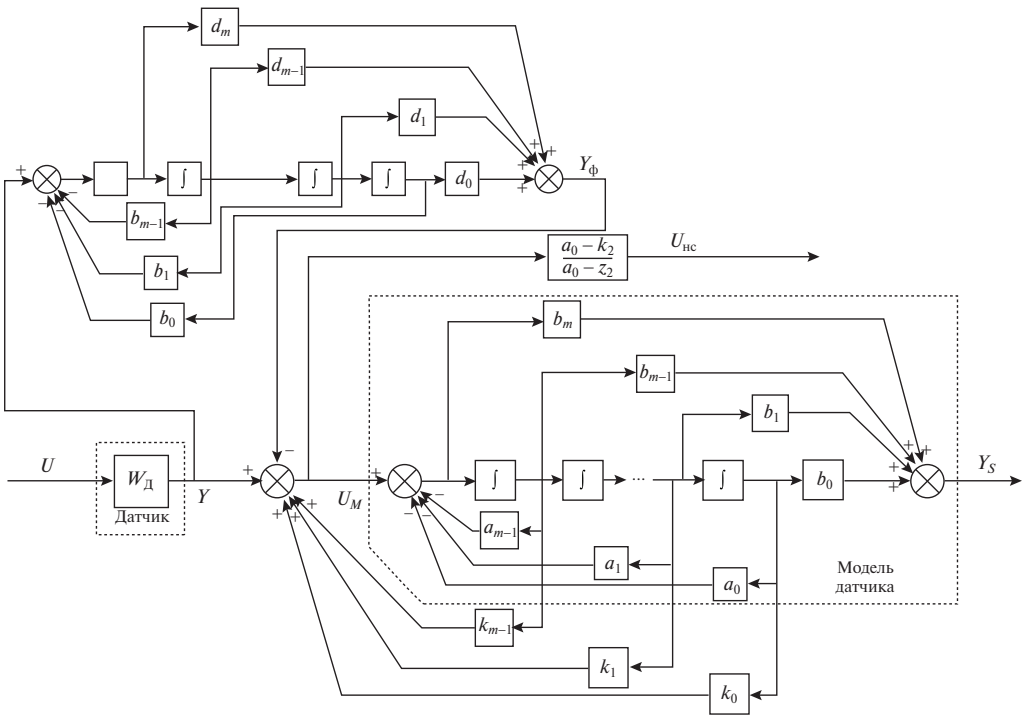


Рис. 1. Структурная модель измерительной системы.

выбрать новые значения. При этом изменения характеристик, относящихся к одной группе, не происходит автоматического изменения характеристик других групп, а корректировка каждой характеристики внутри одной группы происходит независимо для каждого параметра. Таким образом, процесс перенастройки динамических характеристик приводит к усложнению алгоритма обработки сигнала. Для решения задачи снижения сложности алгоритмов обработки выходного сигнала возникает необходимость в разработке модели измерительной системы, в которой количество групп параметров, настраиваемых пользователем, сведено к минимуму.

3. Модель измерительной системы без обратных связей

В рамках данной работы предложена дискретная модель измерительной системы без обратных связей, позволяющая, не задействовав обратные связи и дополнительные фильтры, восстанавливать сигналы по зашумленным исходным данным. Иными словами, из структуры модели исключены параметры обратных связей k_i и параметры фильтров d_j , что позволит уменьшить количество настраиваемых параметров. В предлагаемой модели блок коррекции и дополнительные фильтры заменены на блок восстановления входного сигнала. Модель блока представлена на рис. 2, где $U(t)$ – входной сигнал, $U_\delta(t)$ – восстановленный сигнал, $Y_M(t)$ – выходной сигнал модели, c_l, g_j – коэффициенты модели измерительной системы, $l = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$.

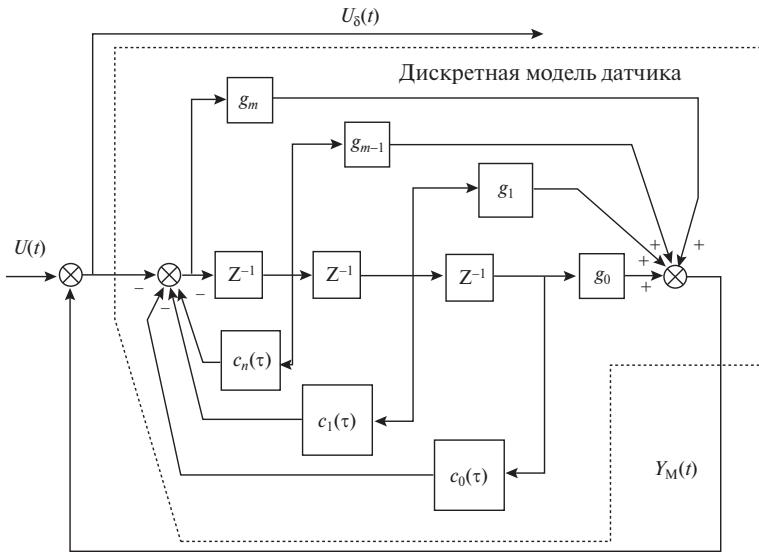


Рис. 2. Блок восстановления входного сигнала в дискретной модели без обратных связей. Обозначения: $U(t)$ – входной сигнал, $U_\delta(t)$ – восстановленный сигнал, $Y_M(t)$ – выходной сигнал модели, c_l, g_j – коэффициенты модели измерительной системы, $l = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$.

Построение математической модели измерительной системы без обратных связей осуществим следующим образом. Основываясь на концепции, принятой в теории динамических измерений [2], передаточная функция $W(p)$ измерительной системы без обратных связей:

$$(1) \quad W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{y(p)}{u(p)}.$$

На первом этапе построения математической модели системы без обратных связей представим передаточную функцию (1) дифференциальным уравнением:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= \\ &= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u. \end{aligned}$$

Из-за искаженности выходного сигнала состоянию системы в начальный момент времени $t = 0$ соответствуют условия

$$y(0) = q_0, y'(0) = q_1, \dots, y^{(n-2)}(0) = q_{n-2}.$$

Обозначим $U = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$. Получаем, что математическая модель без обратных связей (2) имеет вид:

$$(3) \quad a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = U,$$

$$(4) \quad y(0) = q_0, y'(0) = q_1, \dots, y^{(n-2)}(0) = q_{n-2}.$$

Предложенная математическая модель (3), (4) обладает свойством многофункциональности. С одной стороны, она служит основой для валидации дискретной модели без обратных связей, когда, основываясь на известном входном сигнале $U(t)$, необходимо найти функцию $Y_M(t)$, соответствующую выходному сигналу измерительной системы без обратных связей и сравнить полученные результаты с выходным сигналом $Y_S(t)$, сформированным системой с обратными связями. С другой стороны, уравнение (3) используется для разработки вычислительной схемы восстановления входного сигнала $U(t)$ по известному выходному сигналу $Y(t)$. Отметим, что при восстановлении входного сигнала необходимо учитывать, что в измеренном выходном сигнале неизбежно присутствуют шумы и достаточная информация для восстановления входного сигнала предложенным методом заключается в том, что его совокупный уровень не превосходит некоторого уровня δ . Математически эту ситуацию представим следующим образом. В задаче восстановления входного сигнала требуется по зашумленному выходному сигналу $Y(t)$ найти входной сигнал $U_\delta(t)$ при условии, что отклонение $Y(t)$ от точных значений выходного сигнала не превосходит величины δ .

4. Валидация модели без обратных связей

На первом этапе валидации в систему с обратными связями и систему без обратных связей подается известный входной сигнал $U(t)$. В системе с обратными связями формируется выходной сигнал $Y_S(t)$, а в системе без обратных связей – выходной сигнал $Y_M(t)$. На следующем этапе валидации оценивается отклонение $Y_M(t)$ от $Y_S(t)$. Если величина отклонения не превосходит уровень δ , то валидация признается успешной.

Для построения метода формирования выходного сигнала $Y_M(t)$ предлагается следующий подход. Основываясь на идее, представленной в [13], определим функции z_k следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= z_1, \\ y' &= z'_1 = z_2, \\ y'' &= z'_2 = z_3, \\ &\dots \\ y^{(n-2)} &= z'_{n-3} = z_{n-2}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3) преобразуется в систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y = z_1, \\ y' = z'_1 = z_2, \\ y'' = z'_2 = z_3, \\ \dots \\ a_n z''_{n-2} + a_{n-1} z'_{n-2} + a_{n-2} z_{n-2} + \dots + a_2 z'' + a_1 z' + a_0 z = U, \end{cases}$$

а условия (4) примут вид: $z_1(0) = q_0, z_2(0) = q_1, \dots, z'_{n-2}(0) = q_{n-2}$.

Преобразовав последнее уравнение в системе, окончательно получаем, что основой для валидации модели без обратных связей служит система

$$(5) \quad \begin{cases} y = z_1, \\ y' = z'_1 = z_2, \\ y'' = z'_2 = z_3, \\ \dots \\ a_n z''_{n-2} + a_{n-1} z'_{n-2} + a_{n-2} z_{n-2} = U - a_{n-3} z_{n-3} - \dots - a_2 z'' - a_1 z' - a_0 z \end{cases}$$

с начальными условиями

$$(6) \quad z_1(0) = q_0, z_2(0) = q_1, \dots, z'_{n-2}(0) = q_{n-2}.$$

Из (5), (6) требуется найти функции $z_k(t)$, $k = \overline{1, n-2}$. Отметим, что задача (5), (6) относится к классу обратных задач, специфика которых заключается в том, что наличие шумов или малых отклонений в исходных данных приводит к существенному искажению конечного результата и для обеспечения устойчивости метода относительно шумов необходимо использовать регуляризацию. В теории обратных задач регуляризация осуществляется либо за счет введения в уравнение дополнительного стабилизирующего функционала с некоторым параметром регуляризации [14], либо «при решении некоторых типов задач можно обойтись дискретизацией, минуя шаг регуляризации, в таком случае говорят о саморегуляризации задачи при ее дискретизации» [15]. В данной работе предложен метод, параметром регуляризации в котором является шаг дискретизации.

Основные этапы формирования $Y_M(t)$ состоят в следующем. Сначала выбирают некоторое значение шага дискретизации τ , разделив отрезок $[0; T]$ на R частей, $R = (T - 0)/\tau$. Тогда $t_i = (i - 1)\tau$, значению функций $z_k(t)$ в момент времени t_i соответствует обозначение $z_k(t_i) = z_k^i$, $k = \overline{1, n-2}$, $i = \overline{1, R+1}$. Начальные условия примут вид $z_k^1 = q_k$.

Далее, опираясь на конечно-разностные представления производных

$$z'_{n-2}(t_i) = \frac{z_k^i - z_k^{i-1}}{\tau}, \quad z''_{n-2}(t_i) = \frac{z_{n-2}^i - 2z_{n-2}^{i-1} + z_{n-2}^{i-2}}{\tau^2}, \quad i = \overline{1, K}, \quad k = \overline{1, n-2},$$

преобразуют последнее уравнение системы (5). Получается:

$$(7) \quad z_{n-2}^i = \left(U_{i-2} - c_{n-2} z_{n-2}^{i-2} - c_{n-1} \left(\frac{z_{n-2}^{i-1}}{\tau} \right) \right) c_n,$$

где коэффициенты c_{n-2}, c_{n-1}, c_n являются коэффициентами модели без обратных связей и определяются формулами:

$$c_{n-2} = \frac{a_n}{\tau^2} - \frac{a_{n-1}}{\tau} + a_{n-2}, \quad c_{n-1} = \frac{-2a_n}{\tau} + a_{n-1}, \quad c_n = \frac{\tau^2}{a_n},$$

значения U_i формируются из входного сигнала $U = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$. Затем из оставшихся уравнений системы (5) с помощью (7) находят значения z_k^i , $k = \overline{n-3, 1}$ вплоть до значений z_1^i , которые соответствуют значениям $Y_M(t_i)$.

Процесс валидации считается успешным, если выполняется условие $|Y_M(t_i) - Y_S(t_i)| \leq \delta$ в каждый момент времени t_i , в противном случае возвращаемся к начальному этапу вычислительной схемы с новым параметром τ .

5. Метод восстановления входного сигнала

Основой метода восстановления входного сигнала $U_\delta(t)$ по известному зашумленному выходному сигналу $Y(t)$ служит конечно-разностный аналог уравнения (2) с фиксированным τ , полученным на этапе валидации модели без обратных связей, и начальные условия:

$$(8) \quad u(0) = r_0, \quad u'(0) = r_1, \quad \dots, \quad u^{(m-2)}(0) = r_{m-2}.$$

Для построения вычислительной схемы восстановления входного сигнала $U_\delta(t)$ ведем обозначение $Y = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0$. Подставив Y в уравнение (2), получаем:

$$b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u = Y.$$

Далее, как и на этапе валидации, применим метод понижения порядка, выполнив следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} u &= v_1, \\ u' &= v_1' = v_2, \\ u'' &= v_2' = v_3, \\ &\dots \\ u^{(n-2)} &= v_{n-3}' = v_{n-2}. \end{aligned}$$

В результате получим систему

$$(9) \quad \begin{cases} u = v_1, \\ u' = v_1' = v_2, \\ u'' = v_2' = v_3, \\ \dots \\ b_m v_{m-2}'' + b_{m-1} v_{m-2}' + b_{m-2} v_{m-2} = Y - b_{m-3} v_{m-3} - \dots - b_2 v'' - b_1 v' - b_0 v \end{cases}$$

со следующими начальными условиями: $v(0) = r_0, v'(0) = r_1, \dots, v_{m-2}'(0) = r_{m-2}$.

Основная идея предлагаемого метода заключается в том, что на каждом шаге итерационного процесса, сначала, используя конечно-разностный аналог последнего уравнения системы (9), находим значение $v_{m-2}'(t_i)$ в текущей

момент времени t_i согласно формуле

$$(10) \quad v_{m-2}^i = \left(Y_{i-2} - g_{m-2} v_{m-2}^{i-2} - g_{m-1} \left(\frac{v_{m-2}^{i-1}}{\tau} \right) \right) g_m,$$

где коэффициенты g_{m-2}, g_{m-1}, g_m являются коэффициентами модели без обратных связей и определяются формулами

$$g_{m-2} = \frac{b_m}{\tau^2} - \frac{b_{m-1}}{\tau} + b_{m-2}, \quad g_{m-1} = \frac{-2b_m}{\tau} + b_{m-1}, \quad g_m = \frac{\tau^2}{b_m}.$$

Далее, используя конечно-разностные аналоги производных, получаем решение системы (9), находим значение $v'_{m-2}(t_i)$ в текущей момент времени t_i . По завершении итерационного процесса получаем все значения $v_1^i, \overline{1}, \overline{K}$. Эти значения соответствуют восстановленному сигналу $U_\delta(t_i)$.

Основное преимущество предлагаемого метода восстановления входного сигнала заключается в том, что коррекция динамической погрешности осуществляется благодаря эффекту саморегуляризации и уровень шума восстановленного входного сигнала $U_\delta(t)$ не превышает уровень шума в выходном сигнале.

В [16, 17] была получена теоретическая оценка погрешности метода восстановления входного сигнала. В результате сформулирован критерий шага дискретизации τ :

$$(11) \quad \tau \delta^2 \leq \frac{\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_0}{c_2}}{\frac{g_1}{g_2} + \frac{g_0}{g_2}}.$$

Условие (11) свидетельствует о зависимости устойчивости метода от τ . Согласно концепции, приведенной в [15], шаг дискретизации τ является параметром регуляризации, а предложенный метод обладает эффектом саморегуляризации.

Преимущество предложенной модели без обратных связей и метода восстановления входного сигнала заключается в том, что они не требуют перенастройки коэффициентов динамических характеристик k_i и d_j , и это позволяет значительно упростить вычислительную схему.

6. Верификация модели измерительной системы и метода восстановления входного сигнала

Верификация модели измерительной системы и метода восстановления входного сигнала осуществлялась посредством экспериментальных исследований, включающих вычислительные эксперименты. В вычислительных экспериментах сначала, на основе имитационного моделирования, формировались тестовые значения входного сигнала $U(t)$. Тестовые значения использовались для сравнительного анализа с вычисленными значениями $U_\delta(t)$. В последующих экспериментах восстанавливали входной сигнал $U_\delta(t)$ по экспериментальным значениям выходного сигнала Y , используя шаг дискретизации,

полученный на предыдущих этапах исследований. Затем восстановленный сигнал сравнивали с исходным сигналом $U(t)$.

6.1. Методика вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент включал два этапа. Цель первого этапа заключалась в численной валидации модели без обратных связей. На этом этапе осуществлялся подбор шага дискретизации τ . Цель второго состояла в численной верификации метода восстановления входного сигнала. Схема эксперимента представлена на рис. 3.

Этап I. Валидация модели. Сначала в модель с корректирующими обратными связями (W_S) и в модель без обратных связей (W_M) независимо друг от друга подавался сигнал $U(t)$. Далее формировали выходные сигналы Y_M и Y_S . Затем вычисляли

$$\Delta_Y = \max_{t \in [0, T]} |Y_M(t) - Y_S(t)|.$$

Если $\Delta_Y > \delta$, то выбиралось новое значение τ в соответствии с условиями (11), формировался новый выходной сигнал Y_M и пересчитывали Δ . По достижении условия $\Delta_Y \leq \delta$ значение τ фиксировалось, и переходили ко второму этапу эксперимента.

Этап II. Восстановление сигнала. На этом этапе в модель без обратных связей W_M подавался зашумленный сигнал Y . Далее, используя полученный на первом этапе параметр τ , находили значения U_δ , соответствующие восстановленному входному сигналу. В завершении оценивалось отклонение U_δ

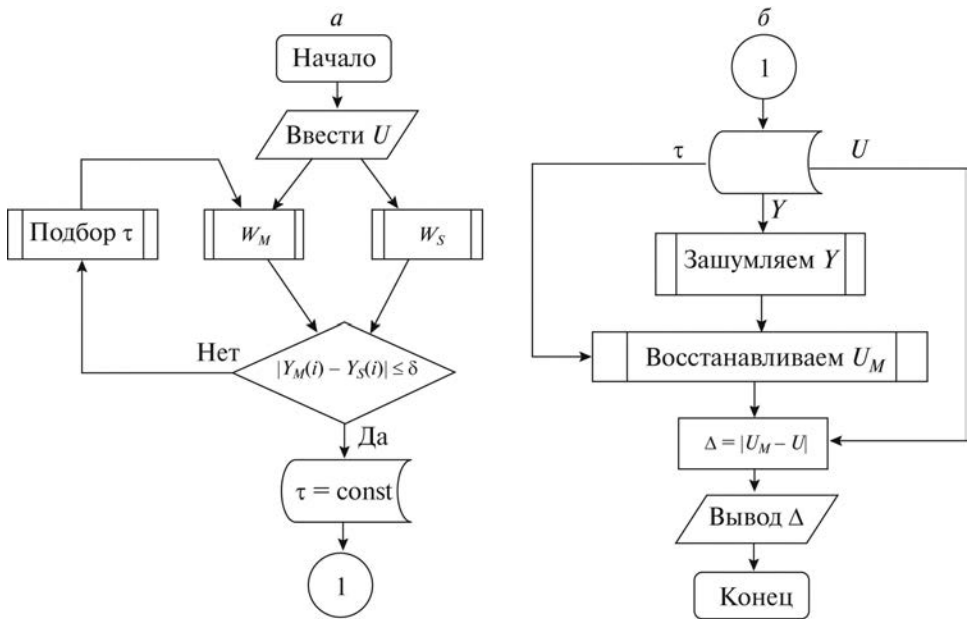


Рис. 3. Структурная схема вычислительного эксперимента: *a* – этап настройки модели; *б* – этап восстановления сигнала.

от U с помощью величины

$$\Delta_U = \max_{t \in [0, T]} |U_\delta(t) - U(t)|.$$

Значение Δ_U является оценкой точности метода восстановления входного сигнала.

6.2. Результаты вычислительного эксперимента

В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований для различных порядков измерительных систем по восстановлению входного сигнала по зашумленным данным.

В вычислительном эксперименте в качестве входного сигнала была взята функция $U(t) = 1$, уровень шума $\delta = 5\%$. Эксперимент проводился для измерительных систем следующих порядков, приведенных в таблице:

Параметры вычислительного эксперимента	
Порядок ИС	Передаточная функция
II+I	$\frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$
IV+0	$\frac{b_0}{(a_2 p^2 + a_1 p + a_0)(a_5 p^2 + a_4 p + a_3)}$
V+III	$\frac{(b_1 p + b_0)(b_4 p^2 + b_3 p + b_2)}{(a_2 p^2 + a_1 p + a_0)(a_5 p^2 + a_4 p + a_3)(a_7 p + a_6)}$

Результаты эксперимента для измерительной системы в со вторым порядком для выходного сигнала и первым для входного сигнала (II+I) представлены на рис. 4. Обозначения: «input signal» – исходный сигнал, «restored signal» – восстановленный сигнал.

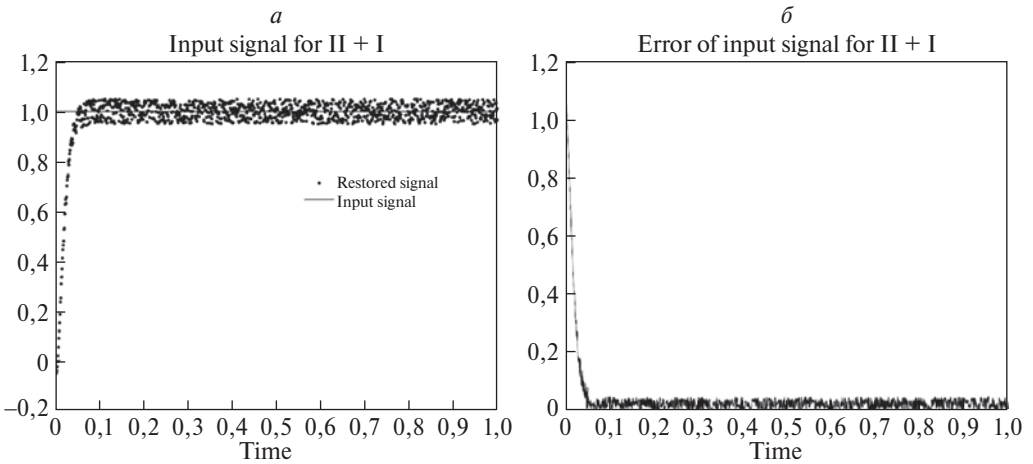


Рис. 4. *a* – Графики исходного входного сигнала $U(t)$ и восстановленного сигнала $U_\delta(t)$. Обозначения: «input signal» – исходный сигнал, «restored signal» – восстановленный сигнал. *б* – Отклонение восстановленного сигнала от исходного для системы второго порядка для выходного сигнала и первого для входного сигнала Δ_U .

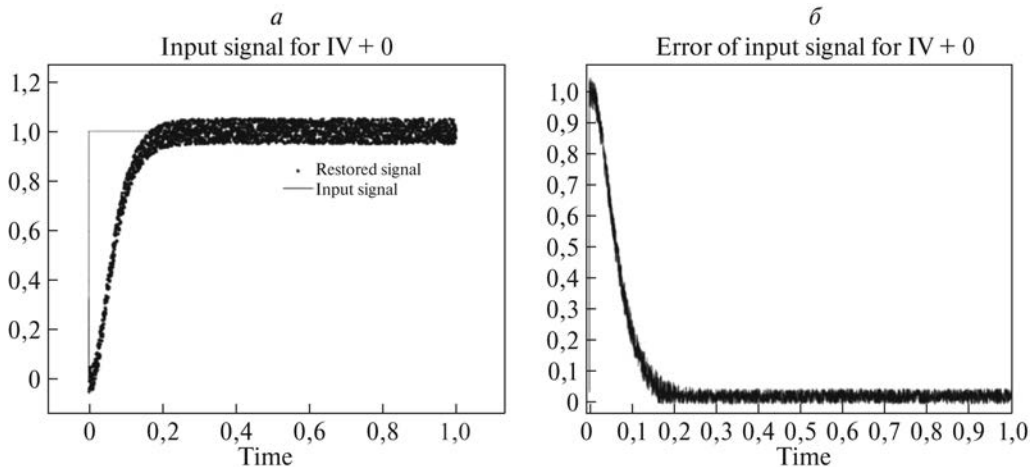


Рис. 5. *а* – Графики исходного входного сигнала $U(t)$ и восстановленного сигнала $U_{\delta}(t)$. Обозначения: «input signal» – исходный сигнал, «restored signal» – восстановленный сигнал. *б* – Отклонение восстановленного сигнала от исходного для системы четвертого порядка для выходного сигнала и нулевого для входного сигнала Δ_U .

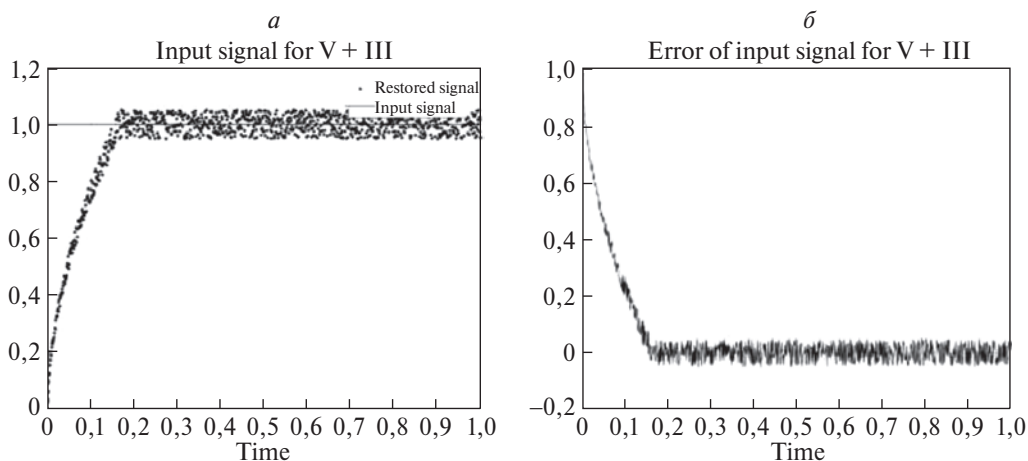


Рис. 6. *а* – Графики исходного входного сигнала $U(t)$ и восстановленного сигнала $U_{\delta}(t)$. Обозначения: «input signal» – исходный сигнал, «restored signal» – восстановленный сигнал. *б* – Отклонение восстановленного сигнала от исходного для системы пятого порядка для выходного сигнала и третьего для входного сигнала Δ_U .

Отклонение восстановленного сигнала от исходного в эксперименте составило не более 5% при $\tau = 1,2 \cdot 10^{-3}$.

Результаты эксперимента для ИС четвертого порядка для выходного сигнала и нулевого для входного сигнала (IV+0) представлены на рис. 5. Обозначения: «input signal» – исходный сигнал, «restored signal» – восстановленный сигнал.

Отклонение восстановленного сигнала от исходного в данном эксперименте составило не более 5% при $\tau = 1,75 \cdot 10^{-3}$.

Результаты эксперимента для ИС четвертого порядка для выходного сигнала и нулевого для входного сигнала (V+III) представлены на рис. 6. Обозначения: «*input signal*» – исходный сигнал, «*restored signal*» – восстановленный сигнал.

Отклонение восстановленного сигнала от исходного в эксперименте составило не более 5% при $\tau = 1,75 \cdot 10^{-3}$.

Результаты экспериментов свидетельствуют об устойчивости метода восстановления входного сигнала посредством модели без обратных связей для систем различных порядков, т.е. уровень шума восстановленного сигнала остается в контролируемых пределах.

7. Заключение

В статье предложены модель измерительной системы без обратных связей и метод восстановления входного сигнала по зашумленному выходному сигналу для динамической системы произвольного порядка. Метод восстановления входного сигнала основан на использовании регуляризирующих подходов. Показано, что метод обладает эффектом саморегуляризации. На основе построенных вычислительных схем проведен вычислительный эксперимент и выполнен сравнительный анализ результатов восстановления входного сигнала с тестовыми функциями. Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что предложенный метод сохраняет уровень погрешности восстановленного входного сигнала на уровне погрешности исходных данных для различных порядков измерительной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shestakov A.L.* Dynamic error correction method // IEEE Transact. Instrument. Measur. 1996. V. 45. No. 1. P. 250–255.
2. *Шестаков А.Л.* Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013.
3. *Грановский В.А., Эттингер Ю.С.* Методика определения динамических свойств средств измерений // Метрология. 1974. № 10. С. 9–12.
4. *Грановский В.А.* Динамические измерения. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
5. *Engelberg S.* Tutorial 15: control theory, part I // IEEE Instrumentation and Measurement Magazine. 2008. V. 11. No. 3. P. 34–40.
<https://doi.org/10.1109/MIM.2008.4534376>
6. *Ruhm K.* Measurement plus observation—A new structure in metrology // Measurement. 2018. V. 126. P. 421–432. ISBN 0263-2241.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2017.03.040>
7. *Солопченко Г.Н.* Определение параметров дробно-рациональной передаточной функции средств измерений по экспериментальным данным // Метрология. 1978. № 5. С. 20–24.
8. *Солопченко Г.Н., Челпанов И.Б.* Компенсация динамических погрешностей при неполных сведениях о свойствах приборов и измеряемых сигналов // Метрология. 1979. № 6. С. 3–13.

9. *Солопченко Г.Н.* Обратные задачи в измерительных процедурах // Измерения, контроль, автоматизация. 1983. № 2. С. 32–46.
10. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1978.
11. *Forbes A., Eichstadt S., Pavese F. et. al.* Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XI, 2018.
12. *Шестаков А.Л.* Измерительный преобразователь динамических параметров [Текст]: а. с. № 1571514: МПК G01P15/08 / заявитель Челяб. политех. ин-т им. Ленинского комсомола. № 4386153/24-10; заяв 01.03.1988; опубл. 15.06.90. Бюл. № 22. 3 с.
13. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шмидтский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
14. *Тихонов А.Н., Арсенин В.А.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
15. *Вайнишко Г.М., Хямарик У.А.* Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах // Изв. вузов. Матем. 1985. № 10. 3–17; Soviet Math. (Iz. VUZ) 1985. 29:10. 1–20.
16. *Япаров Д.Д.* Оценка метода восстановления входного сигнала по зашумленным данным // Вестник УрФО. Безопасность в информационной сфере. 2022. № 4 (46). С. 32–38.
17. *Япаров Д.Д., Шестаков А.Л.* Метод восстановления входного сигнала в динамических системах на основе дискретной модели с исключением корректирующих обратных связей // Вестн. Юж-Урал. гос. ун-та. Серия: «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2022. Т. 22. № 4. С. 56–66.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 17.03.2023

После доработки 17.01.2024

Принята к публикации 20.01.2024



Александр Маркович КРАСНОСЕЛЬСКИЙ
(30 апреля 1955 – 29 марта 2024)

29 марта 2024 г. на 69-м году жизни после тяжелой операции скончался главный научный сотрудник лаборатории № 1 им. Пинскера и наш дорогой друг, коллега, соавтор, собеседник Александр Маркович Красносельский.

Александр Маркович Красносельский родился 30 апреля 1955 г. в семье одного из основателей нелинейного функционального анализа в СССР Марка Александровича Красносельского. Дом Красносельских всегда был полон математиков различных возрастов – учеников и коллег М.А. Красносельского, а дружелюбная атмосфера в доме в значительной степени была заслугой матери Александра Марковича – Сарры Израилевны. И эта атмосфера, несомненно, повлияла на весь образ жизни Александра Марковича, который в любой компании неизменно становился одним из центров коммуникации.

По окончании мехмата МГУ он почти 12 лет проработал в лаборатории математических методов (в группе создания системы автоматической диагностики нарушений сердечного ритма) во Всесоюзном кардиологическом научном центре АМН СССР. За это время он защитил сначала кандидатскую, а вскоре и докторскую диссертацию, став фактически создателем метода гармонического баланса в нелинейном анализе. Результаты его исследований были опубликованы в монографии, переведенной и изданной впоследствии на английском языке.

В дальнейшем, после перехода в Институт проблем передачи информации АН СССР (ИППИ), научные интересы Александра Марковича были тесно связаны с разработкой топологических методов нелинейного анализа, применимых для исследования систем автоматического регулирования и управления, и систем, возникающих в сетях передачи информации. Активное участие он принимал также в создании и развитии математической теории гистерезиса и теории устойчивости асинхронных систем управления и связанных с ними численных методов.

С 1991 г. и до последнего времени Александр Маркович работал в лаборатории № 1 ИППИ, являясь одним из ведущих исполнителей по всем научным темам, выполнявшимся в лаборатории. В последние годы Александр Маркович был неизменным членом диссертационного и Ученого советов ИППИ и членом редколлегии журнала «Автоматика и телемеханика».

Александр Маркович очень любил жизнь и очень любил математику, в том числе и элементарную. Любил обсуждать ее с друзьями и особенно с молодежью. Одним из главных увлечений Александра Марковича в последние десятилетия стала активная педагогическая деятельность сначала в Еврейской государственной академии, а потом в Высшей школе экономики, где он заведовал кафедрой ИППИ и являлся членом Ученого совета факультета математики. Было видно, что именно этого ему всегда не хватало в академическом институте, и он всегда искренне восхищался способностями молодых математиков, рождающихся на матфаке при его участии.

Александр Маркович был незаурядной и разносторонней личностью: он страстно любил книги, любил путешествовать и серьезно занимался велотуризмом. Избегавший конфликтов, он в то же время в принципиальных вопросах был тверд. Одной из черт Александра Марковича было понимание того, что он является членом научного коллектива – в этом плане на него всегда можно было положиться.

Александр Маркович был глубоко верующим человеком. Нежно любил своих четверых детей и семерых внуков. Любил и умел дружить.

Вечная память!

д-р физ.-мат. наук *М.Л. Бланк*
канд. физ.-мат. наук *В.И. Венец*
канд. физ.-мат. наук *С.Г. Влэдуц*
член-корреспондент РАН *А.А. Гальяев*
д-р физ.-мат. наук *В.С. Козьякин*
академик РАН *Н.А. Кузнецов*
д-р физ.-мат. наук *С.К. Ландо*
академик РАН *Д.А. Новиков*
д-р физ.-мат. наук *Г.И. Ольшанский*
д-р физ.-мат. наук *А.Н. Соболевский*
д-р физ.-мат. наук *М.А. Цфасман*

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Ибрагимов Д.Н.** О внешнем оценивании предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных систем с суммарным ограничением на скалярное управление 3
- Цехан О.Б.** Композитный наблюдатель линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с квазидифференцируемыми коэффициентами 31

Нелинейные системы

- Пестерев А.В., Морозов Ю.В.** Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных сатураторов 55
- Рапопорт Л.Б., Генералов А.А., Барулин Б.А., Горбачев М.Д.** Расширение метода линеаризации обратной связью в задаче управления перевернутым маятником на колесе 61
- Жусубалиев Ж.Т., Сопуев У.А., Бушуев Д.А.** О вынужденных колебаниях в релейной системе с гистерезисом 81

Стохастические системы

- Хацкевич В.Л.** О преобразовании стационарного нечетко случайного процесса линейной динамической системой 94

Управление в технических системах

- Япаров Д.Д., Шестаков А.Л.** Саморегуляризирующий метод динамических измерений 112

Заметки, хроника, информация

- Некролог 125

C O N T E N T S

Linear Systems

- Ibragimov D.N.** On the External Estimation of the Limit Reachable and Null-Controlable Sets for Linear Discrete-Time Systems with Summary Constraints on the Scalar Control 3
- Tsekhan O.B.** Composite Observer of a Linear Time-Varying Singularly Perturbed System with Quasidifferentiable Coefficients 31

Nonlinear Systems

- Pesterev A.V., Morozov Yu.V.** Global Stabilization of a Chain of Two Integrators by a Feedback in the Form of Nested Saturators 55
- Rapoport L.B., Generalov A.A., Barulin B.A., Gorbachev M.D.** An Extension of the Feedback Linearization Method in the Control Problem of an Inverted Pendulum on a Wheel 61
- Zhusubaliyev Zh.T., Sopuev U.A., Bushuev D.A.** On Forced Oscillations in a Relay System with Hysteresis 81

Stochastic Systems

- Khatskevich V.L.** On the Transformation of a Stationary Fuzzy Random Process by a Linear Dynamic System 94

Control in Technical Systems

- Yaparov D.D., Shestakov A.L.** Self-Regulating Dynamic Measurement Method ... 112

Notes, Meetings, Information

- Obituary 125